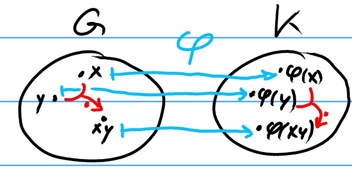
Lineare Algebra 1, Vorl. vom 29.11.13

Wdh.: G, K seien Gruppen,



$\varphi : G \to K$ heißt Homomorphismus,
falls $\forall x, y \in G: \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

$\underline{\underline{\varphi(e_G) = e_K}}$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ für alle $x \in G$

$\ker \varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_K\}$ Kern von φ

- $\ker \varphi$ ist UG von G
- $\varphi(G)$ ist UG von K

- φ injektiv $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{e_G\}$

G, K abelsche Gruppen, $G \xrightarrow{\varphi} \underline{K}$ Homom.

$\varphi(G)$ ist UG in K

Def.: $\mathrm{cok}(\varphi) = \underline{K/\varphi(G)}$ <u>Kokern von φ</u>

"Diese Gruppe besteht genau dann aus einem Element,
wenn gilt $\underbrace{\varphi(G) = K}_{\Leftrightarrow\ \varphi \text{ surjektiv}}$."

- G, K abelsch: φ surjektiv $\Leftrightarrow K/\varphi(G)$ ist einelementig

---

<u>Einschub:</u>
Einen injektiven Homomorphismus nennt man auch <u>Monomorphismus</u>,

einen surjektiven Homomorphismus nennt man auch <u>Epimorphismus</u>,

und einen bijektiven Homomorphismus nennt man auch einen <u>Isomorphismus</u>.

epi: griech. auf
monos: griech. ein
isos: griech. gleich

Ist $G \xrightarrow{\varphi} K$ ein Isomorphismus, so nennt man die Gruppen G und K isomorph und schreibt $G \cong K$.

$\boxed{19.}$ Satz: Sind $(G,\cdot)$ und $(K,\cdot)$ Gruppen, so ist auch das Kartesische Produkt $G \times K$ eine Gruppe mit der Verknüpfung $(x,y)\cdot(u,v) = (xu, yv)$
$(G\times K)\times(G\times K) \to G\times K$
und Neutralelement $(e_G, e_K) \in G\times K$.
Das Inverse von $(x,y) \in G\times K$ ist $(x^{-1}, y^{-1}) \in G\times K$.

Beweis: Das ist klar. $\square$

Ist $(G_j)_{j\in J}$ eine Familie von Gruppen, dann ist auch $\prod_{j\in J} G_j$ eine Gruppe mit
[d.h. $J \to \{G \mid G \text{ Gr.}\}$, $j \mapsto G_j$ $\hookrightarrow (G_j)_{j\in J}$]

Verknüpfung $(x_j)_{j\in J} \cdot (y_j)_{j\in J} = (x_j \cdot y_j)_{j\in J}$

und Neutralelement $(e_{G_j})_{j\in J}$.

Beispiele: (a) $G = K = \mathbb{R}$, dann ist $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ Gruppe mit Verknüpfung $(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v)$, vgl. die Konstruktion von $(\mathbb{C},+)$ in §1.10.

(b) $J = \mathbb{N}$, $G_j = \mathbb{R}$ für $j = 0,1,2,\ldots$ Dann ist $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Folgen. Bezüglich komponentenweiser Addition $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} + (y_j)_{j\in\mathbb{N}} = (x_j + y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bilden die Folgen eine Gruppe.

Die Konvergenten Folgen bilden eine Untergruppe $K \subseteq \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$

und die Nullfolgen (= gegen 0 Konvergenten Folgen) bilden eine Untergruppe $N \subseteq K$. Das wird bewiesen in Analysis I, Satz 4.9. Dort wird auch gezeigt:
die Abbildung $K \to \mathbb{R}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{j\to\infty} x_j$ ist ein Homomorphismus.

$$\left[\lim_{j\to\infty}(x_j+y_j) = \lim_{j\to\infty} x_j + \lim_{j\to\infty} y_j \right]$$

(c) In der Analysis-Vorlesung haben Sie den Körper der reellen Zahlen wie folgt konstruiert:
Sei $G = \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ (Menge aller Folgen von rationalen Zahlen, mit Addition eine Gruppe).
Sei $C \subseteq G$ Menge aller <u>Cauchyfolgen</u> in $\mathbb{Q}$,

d.h. $C = \{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G \mid$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_i - x_j| \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq k \}$,

$N = \{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G \mid \lim_{j\to\infty} x_j = 0 \}$, Menge aller Nullfolgen in G.

Dann haben Sie gezeigt: es sind $N \subseteq C \subseteq G$ Untergruppen und $\mathbb{R} = C/N$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ modulo Nullfolgen.

$\Big[\sqrt{2} = 1{,}41\ldots \rightsquigarrow \quad x_0 = 1, \; x_1 = 1{,}4, \; x_2 = 1{,}41, \; \ldots$
$\rightsquigarrow (x_j) + N$ ist dann gleich $\sqrt{2}$ in C/N $\Big]$

§2: Vektorräume und lineare Abbildungen

$\boxed{1.}$ <u>Definition:</u> Sei $(V,+)$ eine abelsche Gruppe und sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Weiter sei eine Abbildung (Verknüpfung) gegeben
$V \times K \to V$, $(v,a) \mapsto va$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) Für alle $v,w \in V$ und $a \in K$ gilt $(v+w)\cdot a = va + wa$
(ii) Für alle $v \in V$ und $a,b \in K$ gilt $v(a+b) = va + vb$
(iii) Für alle $v \in V$ und $a,b \in K$ gilt $v(ab) = (va)b$
(iv) Für alle $v \in V$ gilt $v \cdot 1 = v$

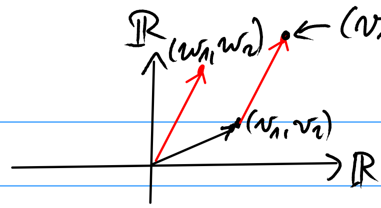
Dann heißt V ein <u>K-Vektorraum</u> oder <u>Vektorraum über K</u>.
Die Elemente von V heißen <u>Vektoren</u> und die Elemente von K heißen <u>Skalare</u>.

<u>Rechenregeln in Vektorräumen:</u> es gilt (a) $v \cdot \underset{\text{Null in } K}{0} = \underset{\text{Null in } V}{0}$

(b) $0 \cdot a = 0$, (Null in V) (c) $v(-a) = (-v)a = -(va)$,
(d) $v \cdot (-1) = -v$ [folgt aus (c) mit $a=1$]
(e) Ist $v \in V$, $a \in K$ und ist $va = 0$, so gilt $v = 0$ oder $a = 0$.

<u>Beweis:</u> (a)–(d) genauso wie in §1.8, etwa $v \cdot 0 = v \cdot (0+0) = v \cdot 0 + v \cdot 0 \overset{\text{kürzen}}{\rightsquigarrow} v \cdot 0 = 0$.
Zu (e): Angenommen, $va = 0$ und $a \neq 0$.
Betrachte $0 = (va)\cdot a^{-1} = v \cdot 1 = v$. $\square$

$\boxed{2.}$ <u>Beispiele:</u> (i) $V = \{0\}$ triviale Gruppe, K beliebig.
$0 \cdot a = 0$ für alle $a \in K$ $\rightsquigarrow$ V ist ein K-Vektorraum.
(ii) $V = K$, $va = v \cdot a$ $\rightsquigarrow$ K ein K-Vektorraum
"Vektorraum der Schule" (iii) $V = K^n$ Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus K
$(v_1,\dots,v_n) + (w_1,\dots,w_n) = (v_1+w_1,\dots,v_n+w_n)$, $(v_1,\dots,v_n)\cdot a = (v_1 a,\dots,v_n a)$



$\leftarrow (v_1+w_1,\ v_2+w_2) = (v_1, v_2) + (w_1, w_2)$

(iv) Das Ganze etwas allgemeiner. Ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie von K-Vektorräumen, dann ist auch das kartesische Produkt $\prod_{j\in J} V_j$ ein K-Vektorraum bzgl.

$$((v_j)_{j\in J})\, a = (v_j a)_{j\in J}, \quad (v_j)_{j\in J} + (w_j)_{j\in J} = (v_j + w_j)_{j\in J}.$$

Insbesondere ist der Raum $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ aller reellen Folgen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$\boxed{3.}$ Definition: Es sei V ein K-Vektorraum.
Eine Untergruppe $W \subseteq V$ heißt Untervektorraum (kurz Unterraum), wenn für alle $w \in W$ und $a \in K$ gilt $w \cdot a \in W$.

Beispiele: (a) $\{0\} \subseteq V$ und V selber sind Unterräume von V
(b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ist Untergruppe bzgl. Addition, aber kein ($\mathbb{Q}$-) Unterraum. z.B. gilt für $v=1$, $a=\frac{1}{2}$ nicht $v \cdot a = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.