Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 28. Januar 2014

Wdh.:

$\boxed{20.}$ Satz: Seien V, W endl. dim. K-VRe, sei $\varphi: V \to W$ lineare Abb.
Weiter sei $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$ und $r = \dim(\varphi(V))$.
Dann gibt es Basen $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ und $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$ derart, dass
$\varphi(b_i) = c_i$ für $i = 1, \dots, r$,
$\varphi(b_i) = 0$ für $i > r$.

$$\begin{array}{cccc} b_1, \dots, b_r, & b_{r+1}, & \dots, & b_m \\ \varphi \downarrow \quad \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ c_1, \dots, c_r & 0 & & 0 \end{array}$$

$r = \dim(\varphi(V))$ heißt Rang von φ,
Kurz: $\operatorname{rk}(\varphi) = \dim(\varphi(V))$.

Korollar: Sei $X \in K^{n \times m}$ eine beliebige Matrix.
Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in GL_n(K)$ und $T \in GL_m(K)$ so, dass

$$S \cdot X \cdot T = \left.\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}\right\}{r}.$$

Die Zahl r heißt der Rang der Matrix X, $\operatorname{rk}(X) = r$ (und diese Zahl ist durch X eindeutig bestimmt).

Beweis: Betrachten die lineare Abbildung $\xi: K^m \to K^n$,
$$\xi\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Es folgt für die Standardbasen $B_n \subseteq K^n$ und $B_m \subseteq K^m$, dass

$${}_{B_n}M_{B_m}(\xi) = X,$$

denn

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} v_j, \qquad X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix}.$$

Der vorige Satz $\boxed{20.}$ liefert nun Basiswechsel-Matrizen S und T mit

$$S X T = \left.\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\right\}r,$$

und $r = \dim(\xi(K^m))$.

⌜Denn: Wende Satz 20. an mit $\varphi = \xi$, Basis $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq K^m$, $C = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq K^n$:

$$\underbrace{{}_C M_B(\xi)}_{} = \underbrace{{}_C M_{B_n}(id_{K^n})}_{S} \cdot \underbrace{{}_{B_n}M_{B_m}(\xi)}_{X} \cdot \underbrace{{}_{B_m}M_B(id_{K^m})}_{T}$$

↳ ist die angegebene Matrix

$$\begin{array}{c} \left.\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\right\}r, \\ \text{Spalte } i \end{array}$$

da $\xi(b_i) = c_i = c_1 \cdot 0 + \dots + c_{i-1} \cdot 0 + \underline{c_i \cdot 1} + c_{i+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0$,
für $i = 1, \dots, r$,
und $\xi(b_i) = 0$ ⌟

<u>Bem.</u>: Der Rang von X ist also gleich dem Rang der von X induzierten linearen Abbildung $\xi: K^m \to K^n$, $\xi(v) = X \cdot v$. Er ändert sich nicht, wenn X mit einer invertierbaren Matrix multipliziert wird.

$\boxed{21.}$ Elementare Matrizenumformungen

(a) Sei $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis des m-dimensionalen K-Vektorraums V. Für $i \neq j$ und $s \in K$ sei $\tau_{ij}(s) : V \to V$ die durch

$$\tau_{ij}(s)\,(b_k) = \begin{cases} b_k + b_i s, & \text{wenn } k = j, \\ b_k \quad , & \text{wenn } k \neq j, \end{cases}$$

definierte lineare Abbildung. Es gilt

$$\tau_{ij}(0) = id_V, \qquad \tau_{ij}(s) \circ \tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(s+t),$$

also ist $\tau_{ij}(s) : V \to V$ stets ein Isomorphismus mit Inverser $\tau_{ij}(-s)$.

$\ulcorner$ $$\tau_{ij}(s)\left(\tau_{ij}(t)(b_k)\right) = \begin{cases} \tau_{ij}(s)\,(b_k + b_i t), & k = j, \\ \tau_{ij}(s)\,(b_k), & k \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \tau_{ij}(s)(b_k) + \tau_{ij}(s)(b_i) \cdot t, & k = j, \\ b_k, & k \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_k + b_i s + b_i t, & k = j \\ b_k, & k \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b_k + b_i (s+t), & k = j \\ b_k, & k \neq j \end{cases}$$

$$= \tau_{ij}(s+t)\,(b_k). \lrcorner$$

Die Begleitmatrix von $\tau_{ij}(s)$ ist

$$T_{ij}(s) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \boxed{s} & \\ & \ddots & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \quad\quad\quad j \end{array} & \end{array}.$$

Lemma: Sei $X \in K^{n\times m}$, sei $T_{ij}(s) \in K^{n\times n}$ und $T_{kl}(t) \in K^{m\times m}$.
Die Matrix $Y = T_{ij}(s)\cdot X \in K^{n\times m}$ entsteht aus X durch Addition des s-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.
Die Matrix $Z = X\cdot T_{kl}(t) \in K^{n\times m}$ entsteht aus X durch Addition des t-fachen der k-ten Spalte zur l-ten Spalte.

Beweis: Sei $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = X\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$T_{ij}(s)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i + s w_j \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \text{wo } w_p = \sum_{q=1}^{m} \xi_{pq} v_q,$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\rightsquigarrow T_{ij}(s) X \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_q \xi_{1q} v_q \\ \vdots \\ \sum_q \xi_{iq} v_q + s \sum_q \xi_{jq} v_q \\ \vdots \\ \sum_q \xi_{nq} v_q \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{i1} + s\xi_{j1} & \cdots & \xi_{im} + s\xi_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$T_{kl}(t)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k + t v_l \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeile } k,$$

$$X\cdot T_{kl}(t)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{1k}\, t v_l \\ \vdots \\ \xi_{nk}\, t v_l \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{Spalte } l \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & (\xi_{1l} + t\xi_{1k}) & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & (\xi_{nl} + t\xi_{nk}) & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

$\square$

(b) Für $a \in K^*$ sei $\delta_i(a): V \to V$ die durch

$$\delta_i(a)(b_k) = \begin{cases} b_k \cdot a & \text{für } k = i, \\ b_k & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte lineare Abbildung.
Es gilt $\delta_i(1) = \mathrm{id}_V$ und $\delta_i(a) \circ \delta_i(b) = \delta_i(ab)$,
folglich ist $\delta_i(a): V \to V$ ein Isomorphismus.
Die Begleitmatrix ist

$$D_i(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Lemma: Sei $X \in K^{n \times m}$, sei $D_i(a) \in K^{n \times n}$ und $D_j(b) \in K^{m \times m}$.
Die Matrix $Y = D_i(a) X$ entsteht aus X durch Multiplikation der i-ten Zeile mit a.
Die Matrix $Z = X \cdot D_j(b)$ entsteht aus X durch Multiplikation der j-ten Spalte mit b.

Beweis:

$$D_i(a)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ a \cdot w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad X \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

$$w_p = \sum_{q=1}^{m} \xi_{pq} v_q$$

$$\rightsquigarrow D_i(a) X \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a\xi_{i1} & \cdots & a\xi_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

$$D_j(b)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ b \cdot v_j \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow X \cdot D_j(b) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ b v_j \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1j} b & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nj} b & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}. \qquad \square$$

(c) Es sei $\mathrm{Sym}(m) = \mathrm{Sym}(\{1,\ldots,m\})$ die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1,\ldots,m\}$, vgl. §1.5.
Die Umkehrabbildung zu $\pi \in \mathrm{Sym}(m)$ ist π^{-1}.
Für jedes $\pi \in \mathrm{Sym}(m)$ definieren wir eine lineare Abbildung $L(\pi): V \to V$ durch

$$L(\pi)(b_k) = b_{\pi(k)}$$

(wobei wieder $\mathcal{B} = \{b_1,\ldots,b_m\}$ eine Basis von V sei), vgl. §3.10.
Die Begleitmatrix sei $P(\pi) \in K^{m\times m}$.

Es gilt $L(\pi^{-1}) \circ L(\pi) = \mathrm{id}_V$, also ist $P(\pi)$ eine invertierbare Matrix.
In der j-ten Spalte von $P(\pi)$ steht in der $\pi(j)$-ten Zeile eine 1, an den anderen Stellen steht 0 in dieser Zeile, denn

$$L(\pi)(b_j) = b_{\pi(j)}.$$

Es gilt also

$$P(\pi)\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{e_j}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow \pi(j)\\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

und damit ist

$$P(\pi)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{\pi^{-1}(1)}\\ \vdots\\ v_{\pi^{-1}(m)}\end{pmatrix}, \text{ da } P(\pi)\Big(\sum_{j=1}^m e_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^m e_{\pi(j)} v_j = \sum_{k=1}^m e_k v_{\pi^{-1}(k)},$$

die Koordinaten werden mit π permutiert.

<u>Lemma:</u> Sei $X \in K^{n\times m}$ und $P(\pi) \in K^{n\times n}$ sowie $P(\rho) \in K^{m\times m}$.
Die Matrix $Y = P(\pi)\cdot X \in K^{n\times m}$ entsteht aus X durch Ersetzen der $\pi(j)$-ten Zeile durch die j-te Zeile.
Die Matrix $Z = X \cdot P(\rho) \in K^{n\times m}$ entsteht aus X durch Ersetzen der k-ten Spalte durch die $\rho(k)$-te Spalte.

(!)