Vorlesung in Linearer Algebra 1 vom 24. Januar 2014

Wdh.:

- Begleitmatrix zu $\varphi: \underset{\substack{\cup\!\mid\\ A}}{U} \to \underset{\substack{\cup\!\mid\\ B}}{V}$ (Basen A, B): $\quad {}_B M_A(\varphi) = (\varphi_{b,a})$

  mit $\varphi(a) = \sum_{b \in B} b\, \varphi_{b,a}$

- Satz $\boxed{15.}$: $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ linear

  Basen: $A \subset U$, $B \subset V$, $C \subset W$

  Dann: $\quad {}_C M_A(\psi \circ \varphi) = {}_C M_B(\psi) \cdot {}_B M_A(\varphi)$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

hat Basis $\{E, I\}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$, $\quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ist Körper, isomorph zu $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

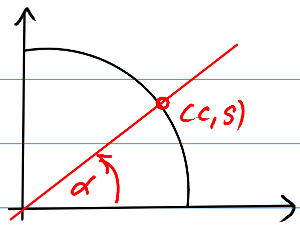
($\cdot$: Matrixmultiplikation)

Für $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ setzen wir $t = \sqrt{\delta} = \sqrt{u^2 + v^2}$

und schreiben $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot t & -s \cdot t \\ s \cdot t & c \cdot t \end{pmatrix}$

(das geht immer – für $t = 0$ setze $c = 1$, $s = 0$).

Dann gilt $c^2 + s^2 = 1$, d.h. (c, s) ist ein Punkt auf dem Einheitskreis.

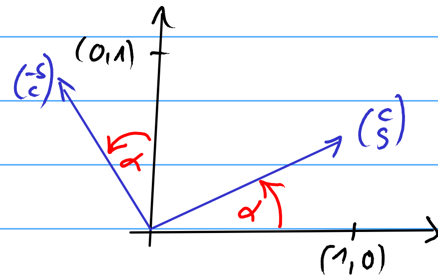


Es gibt $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, mit $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$ und die Matrix $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$

beschreibt eine <u>Drehung</u> der Ebene (um den Ursprung) mit Drehwinkel α, denn

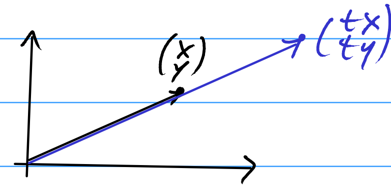
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$



Weiter ist $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ eine <u>Streckung um den Faktor t</u>,

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$$

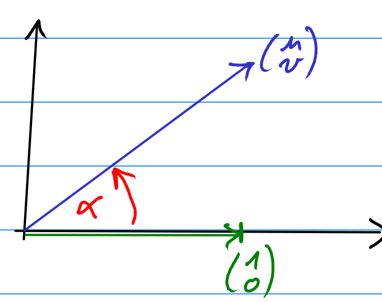


Das Produkt $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$

ist eine <u>Drehstreckung</u> (drehen um Winkel α, dann strecken mit Faktor $t = \sqrt{u^2+v^2}$ oder umgekehrt), also ist <u>$\mathcal{C}$ die Menge aller Drehstreckungen der Ebene.</u>

Zu jedem Punkt $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$ gibt es <u>genau eine</u> Drehstreckung $F \in \mathcal{C}$ mit $F\binom{1}{0} = \binom{u}{v}$,

nämlich $F = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.



$$\left[\, u + iv = t \cdot e^{i\alpha} \,\right]$$

19. Basiswechsel

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $B, C \subseteq V$ zwei Basen.

Die Matrix
$$ {}_B M_C(\mathrm{id}_V) $$
heißt Basiswechselmatrix zu den Basen B und C.

Wenn $B \neq C$ ist, dann ist das nicht die Einheitsmatrix.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ mit Basen $b_1 = \binom{1}{0}, b_2 = \binom{0}{1}$, $c_1 = \binom{1}{1}, c_2 = \binom{1}{2}$.
$$ \rightsquigarrow \quad {}_B M_C(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} $$

denn $\mathrm{id}_V(c_1) = c_1 = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1$, $\mathrm{id}_V(c_2) = c_2 = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2$.

Ist nun $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen K-Vektorräumen sind $D, E \subseteq W$ zwei Basen, dann gilt nach § 3.15, dass
$$ {}_E M_B(\varphi) = {}_E M_D(\mathrm{id}_W) \cdot {}_D M_C(\varphi) \cdot {}_C M_B(\mathrm{id}_V), $$
da $\varphi = \mathrm{id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{id}_V$.

Mit Basiswechselmatrizen rechnet man also um, welche Matrizen eine lineare Abbildung φ bezüglich verschiedener Basen [Basispaare] hat.

<u>Beachte:</u> Es gilt $\mathbb{1}_B = {}_B M_B(\mathrm{id}_V) = {}_B M_C(\mathrm{id}_V) \cdot {}_C M_B(\mathrm{id}_V)$,

$$\mathbb{1}_C = {}_C M_C(\mathrm{id}_V) = {}_C M_B(\mathrm{id}_V) \cdot {}_B M_C(\mathrm{id}_V).$$

Basiswechselmatrizen sind also <u>immer</u> invertierbar.

Sei jetzt $V = K^m$. Die "Standardbasis" von K^m ist $B_m = \{e_1, \dots, e_m\}$, $e_j = \begin{array}{cl} \left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$.

Ist $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine weitere, beliebige Basis von K^m, so gilt für die Basiswechselmatrix

$$ {}_{B_m} M_C(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix} $$

wegen $c_j = \sum_{i=1}^{m} e_i \gamma_{ij}$, dass $c_j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{mj} \end{pmatrix}$.

Die Spalten in der Matrix bestehen also einfach aus den Koordinaten der neuen Basis $c_1, \dots, c_m$ (genau wie im vorigen Beispiel in $\mathbb{R}^2$).

Über Basiswechsel löst man lineare Gleichungen. Dazu brauchen wir das folgende Ergebnis.

$\boxed{20.}$ <u>Satz:</u> Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$ und $r = \dim(\varphi(V))$.

Dann gibt es Basen $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ und $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$ so, dass gilt

$$\varphi(b_i) = c_i \text{ für } i = 1, \dots, r,$$
$$\varphi(b_i) = 0 \text{ für } i > r.$$

<u>Beweis:</u> Es gilt nach der Dimensionsformel §3.7, dass $m = r + \dim(\ker(\varphi))$, also $\dim(\ker(\varphi)) = m - r$.

Sei $\{b_{r+1}, \dots, b_m\}$ eine Basis von $\ker(\varphi)$.

Mit dem Ergänzungslemma §3.5 [$T = \{b_{r+1}, \dots, b_m\}$, E eine Basis von V] gibt es $b_1, \dots, b_r \in V$ so, dass $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V ist.

Setze jetzt $c_i = \varphi(b_i)$ für $i = 1, \dots, r$.

Weil $\varphi(b_j) = 0$ für $j = r+1, \dots, m$ gilt, folgt

$$\varphi(V) = \varphi(\langle\{b_1, \dots, b_m\}\rangle) \underset{\text{ÜA 9.2 ii)}}{=} \langle\{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_m)\}\rangle$$

$$= \langle\{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_r)\}\rangle = \langle\{c_1, \dots, c_r\}\rangle.$$

Nach dem Ergänzungslemma [$T = \emptyset$, $E = \{c_1, \dots, c_r\}$ im K-VR $\varphi(V)$] enthält $\{c_1, \dots, c_r\}$ eine Basis von $\varphi(V)$.

Andererseits gilt aber nach Voraussetzung $\dim(\varphi(V)) = r$, also <u>ist</u> $\{c_1, \dots, c_r\}$ eine Basis von $\varphi(V)$.

Wieder mit dem Ergänzungslemma [$T = \{c_1, \dots, c_r\}$, E eine Basis von W, im K-VR W] finden wir $c_1, \dots, c_n \in W$ so, dass $c_1, \dots, c_n$ eine Basis von W ist.

$\square$

Die Zahl $r = \dim(\varphi(V))$ nennt man den <u>Rang</u> der linearen Abbildung φ,

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \dim(\varphi(V)).$$