Vorlesung in Linearer Algebra 1 vom 21. Januar 2014

- C, B endliche Mengen
  $\rightsquigarrow$ Elemente von $K^{C\times B}$ heißen Matrizen mit Indexmenge $C\times B$

Spezialfall: $B' = \{1,\dots,m\}$, $C' = \{1,\dots,n\}$

$$K^{n\times m} = K^{C'\times B'}$$

Die Elemente des $K^{n\times m}$, etwa $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$,

schreibt man als rechteckiges Zahlenschema $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nm} \end{pmatrix}$.

Sind C, B endliche Mengen, $\# C = n$, $\# B = m$,
gilt die Isomorphie $K^{C\times B} \cong K^{n\times m}$.

- V, W K-Vektorräume, $B \subseteq V$ Basis, $C \subseteq W$ Basis

Haben Isomorphismus $L(V,W) \to K^{C\times B} \cong K^{n\times m}$

$$\varphi \mapsto {}_C M_B(\varphi) = (\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}}$$

mit Einträgen $\varphi_{c,b}$, die durch

$$\varphi(b) = \sum_{c\in C} c\,\underbrace{\varphi_{c,b}}$$ bestimmt sind.

Koordinate von $\varphi(b)$ bzgl. c, d.h. $\varphi_{c,b} = \varphi(b)_c$

Explizit: $B = \{b_1,\dots,b_m\}$, $C = \{c_1,\dots,c_n\}$

- ist φ geg., wird φ auf Matrix $M \in K^{n\times m}$ abgebildet
  mit Einträgen φ_{ij} in Zeile i und Spalte j,
  für die $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{ij}$ gilt $\rightsquigarrow$ Spalte j von M ist
  Koordinatenvektor des
  Bildes des j-ten Basisvektors b_j

- ist $M \in K^{n\times m}$ geg. mit Eintrag φ_{ij} in Zeile i, Spalte j, so ist das Urbild von M die lineare Abb. $\varphi: V \to W$ mit $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{ij}$

- im konkreten Fall: $V = K^m$, $W = K^n$, B, C Standardbasis:
  - jede lin. Abb. $\varphi: K^m \to K^n$ beschreibt eine Matrix $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, wo j-te Spalte das Bild des j-ten Basiselements von B ist
  - jede Matrix $M \in K^{n\times m}$ beschreibt eine lin. Abb. $\varphi: K^m \to K^n$ durch $\varphi(v) = M \cdot v = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_{nj} v_j \end{pmatrix}$, wenn $M = (\varphi_{ij})$

    Matrixmultiplikation

<u>Matrixmultiplikation:</u> A, B, C endl. Mengen

$$K^{C\times B} \times K^{B\times A} \longrightarrow K^{C\times A}$$

$$\left((\psi_{c,b}), (\varphi_{b,a})\right) \mapsto (\psi_{c,b}) \cdot (\varphi_{b,a}) = (\xi_{c,a})$$

$$\text{mit } \xi_{c,a} = \sum_{b\in B} \psi_{c,b} \varphi_{b,a}.$$

$\boxed{15.}$ <u>Satz:</u> Sind U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$ und sind $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ lineare Abbildungen, so gilt

$${}_C M_A(\psi \circ \varphi) = {}_C M_B(\psi) \cdot {}_B M_A(\varphi)$$

Matrixmultiplikation

Für $A=\{1,\ldots,l\}$, $B=\{1,\ldots,m\}$, $C=\{1,\ldots,n\}$:

$$K^{n\times m}\times K^{m\times l}\longrightarrow K^{n\times l}$$

$$n\updownarrow\overbrace{\begin{pmatrix}\psi_{11}&\cdots&\psi_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ \psi_{n1}&\cdots&\psi_{nm}\end{pmatrix}}^{m}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_{11}&\cdots&\varphi_{1l}\\ \vdots&&\vdots\\ \varphi_{m1}&\cdots&\varphi_{ml}\end{pmatrix}}_{l}\updownarrow m=\underbrace{\begin{pmatrix}\xi_{11}&\cdots&\xi_{1l}\\ \vdots&&\vdots\\ \xi_{n1}&\cdots&\xi_{nl}\end{pmatrix}}_{l}\updownarrow n$$

wo $\quad \xi_{ik}=\sum_{j=1}^{m}\psi_{ij}\varphi_{jk}$

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$

<u>Satz:</u> Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ.

$$\begin{tikzcd}
\underset{\varrho_{d,c}}{K^{D\times C}}\times\underset{\psi_{c,b}}{K^{C\times B}}\times\underset{\varphi_{b,a}}{K^{B\times A}} \arrow[r] \arrow[d] & K^{D\times B}\times K^{B\times A} \arrow[d] \\
K^{D\times C}\times K^{C\times A} \arrow[r] & K^{D\times A}
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> Das ist einfach die Identität

$$\sum_{b\in B}\Big(\sum_{c\in C}\varrho_{d,c}\psi_{c,b}\Big)\varphi_{b,a}=\sum_{c\in C}\sum_{b\in B}\varrho_{d,c}\psi_{c,b}\varphi_{b,a}$$
$$=\sum_{c\in C}\varrho_{d,c}\Big(\sum_{b\in B}\psi_{c,b}\varphi_{b,a}\Big).$$

Alternative Begründung: jede Matrix lässt sich deuten als Matrix einer linearen Abbildung, die Komposition von Abbildungen ist aber assoziativ. $\square$

Matrizenprodukt ist nicht kommutativ: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{16.}$ Matrizenringe. Ist B eine endliche Menge, so liefert die Matrizenmultiplikation eine assoziative Verknüpfung $K^{B\times B} \times K^{B\times B} \to K^{B\times B}$ auf den $B\times B$-Matrizen. Man nennt $K^{B\times B}$ den Matrizenring (der $B\times B$-Matrizen).

Das Einselement im Ring ist die Einheitsmatrix

$$(\varphi_{b,b'})_{b,b'\in B} = \mathbb{1}_B \quad \text{mit} \quad \varphi_{b,b'} = \begin{cases} 1, & \text{falls } b=b', \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Nullelement im Ring ist die Nullmatrix $\varphi_{b,b'} = 0$ für alle $b, b' \in B$.

Für $B = \{1, \dots, n\}$ schreibe $\mathbb{1}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n$.

Ist V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B, so gilt

$$\operatorname{End}(V) \cong K^{B\times B}.$$

Genauer: Die Abbildung
$$\begin{aligned} \operatorname{End}(V) &\longrightarrow K^{B\times B} \\ \varphi &\longmapsto {}_B M_B(\varphi) \end{aligned}$$
ist ein Isomorphismus von Ringen.

$\ulcorner$
$$\begin{aligned} {}_B M_B(\varphi + \psi) &= {}_B M_B(\varphi) + {}_B M_B(\psi) \\ {}_B M_B(\varphi \circ \psi) &= {}_B M_B(\varphi) \cdot {}_B M_B(\psi) \\ {}_B M_B(\varphi \cdot a) &= {}_B M_B(\varphi) \cdot a \end{aligned}$$
$\lrcorner$

Die <u>Einheitengruppe</u> des Matrizenrings $K^{n\times n}$ besteht aus allen Matrizen $F\in K^{n\times n}$, für die es ein $G\in K^{n\times n}$ gibt mit

$$F\cdot G = \mathbb{1}_n = G\cdot F.$$

Unter den Isomorphien ($B\subseteq V$ eine Basis, $\# B = n$)

$$K^{n\times n}\cong K^{B\times B}\cong \mathrm{End}(V)$$

entspricht sie genau der <u>generellen linearen Gruppe</u> $GL(V)$, vgl. §2.16.

Man schreibt

$$\begin{aligned} GL_n(K) &= \{F\in K^{n\times n} \mid F \text{ ist Einheit}\} \\ &= \{F\in K^{n\times n} \mid \text{es gibt } G\in K^{n\times n} \text{ mit } GF=\mathbb{1}_n = FG\}. \end{aligned}$$

Die Matrizen in $GL_n(K)$ heißen auch <u>regulär</u> oder <u>invertierbar</u>.

$\boxed{17.}$ <u>Beispiele:</u> (1) $n=1$, $K^{1\times 1}=K$ als Ring,

$$GL_1(K) = K^* = \{t\in K \mid t\neq 0\}.$$

(2) $n=2$

<u>Lemma:</u> $\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in K^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\delta = ad - bc \neq 0$ gilt.

<u>Beweis:</u>

Betrachte $F=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ und $G=\begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$.

Es gilt

$$F\cdot G = \begin{pmatrix} \delta & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix} = G\cdot F.$$

Ist $\delta\neq 0$, so folgt mit $G' = \frac{1}{\delta}\cdot G$, dass $F\cdot G' = \mathbb{1}_2 = G'\cdot F$.

Ist $\delta = 0$, so folgt $F\cdot G = \underset{\text{Nullmatrix}}{0}$.

Wenn es $H\in K^{2\times 2}$ gäbe mit $H\cdot F = \mathbb{1}_2$, so hätten wir $\underbrace{H\cdot F}_{\mathbb{1}_2}\cdot G = G = H\cdot 0 = 0$, ↯.

□

Man nennt $\delta = ad - bc$ die Determinante von $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, wir kommen darauf zurück.

$\boxed{18.}$ Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$.

Offensichtlich ist
$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum
mit Basis $\{E, I\}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$,
$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann: $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = E \cdot u + I \cdot v$.

weiter gilt

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

sowie $E \cdot I = I \cdot E = I$ und $E^2 = E$, also

$$(E \cdot u + I \cdot v) \cdot (E u' + I v') = E \cdot (u u' - v v') + I (v u' + u v')$$

$$= (E u' + I v') \cdot (E u + I v).$$

Es folgt: $(\mathcal{C}, \cdot, +)$ ist ein kommutativer Ring.

weiter ist $(Eu + Iv) \cdot (Eu - Iv) = E \cdot \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=\delta}$.

Da gilt: $\delta = 0 \Leftrightarrow u = v = 0$ (denn $u, v \in \mathbb{R}$)

folgt: $(\mathcal{C}, \cdot, +)$ ist Körper.

Ein direkter Vergleich mit §1.10 zeigt:
die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}$, $(u, v) \mapsto Eu + Iv$
ist ein Isomorphismus von $\mathcal{C}$ mit dem in §1.10 angegebenen Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Was bedeutet das anschaulich in der Ebene $\mathbb{R}^2$?