Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 20. Dezember 2013

Wdh.: V ein K-VR, $X \subseteq V$

- $\langle X \rangle = \{ x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s \mid s \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_s \in X,\ a_1, \ldots, a_s \in K \}$

  Erzeugnis von X in V

- X heißt Erzeugendensystem von V, falls $V = \langle X \rangle$
- ein Erzeugendensystem $E \subseteq V$ von V ist minimal, falls kein $F \subseteq V$ ex. mit $F \subsetneq E$ und F Erzeugendensystem.

- $X \subseteq V$ heißt linear unabhängig, falls für alle $s \in \mathbb{N}$, alle $x_1, \ldots, x_s \in X$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und alle $a_1, \ldots, a_s \in K$:
  $$x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$$
- $X \subseteq V$ heißt linear abhängig, falls X nicht linear unabhängig ist.

$\boxed{3.}$ Def.: Sei V ein K-Vektorraum. Ein Erzeugendensystem $B \subseteq V$, das linear unabhängig ist, heißt Basis von V.

Beispiele: (a) $\emptyset$ ist Basis von $V = \{0\}$

(b) $\{(1,0), (0,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Satz: Sei V ein K-Vektorraum und sei $B \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) B ist eine Basis von V,
(ii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V,
(iii) B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

Beweis: Der Satz ist offensichtlich wahr im Fall $V = \{0\}$. Sei daher ohne Einschränkung $V \neq \{0\}$.

(i) ⇒ (ii): Sei $B \subseteq V$ eine Basis.
Sei $b \in B$ und $B' = B - \{b\}$. Zeige $\langle B' \rangle \neq V$:
Es gilt jedenfalls $b \neq 0$, weil B linear unabhängig ist.
Angenommen, $\langle B' \rangle = V$.
wegen $V \neq \{0\}$ folgt $B' \neq \emptyset$,
und es gibt $b_1, \ldots, b_s \in B'$, sowie $a_1, \ldots, a_s \in K$

$$\text{mit } b = b_1 a_1 + \ldots + b_s a_s.$$

Wir können annehmen, dass $b_i \neq b_j$ für $1 \leq i \neq j \leq s$.
Es folgt

$$0 = b_1 a_1 + \ldots + b_s a_s + b \cdot \underbrace{(-1)}_{\neq 0},$$

ein Widerspruch zur Linearen Unabhängigkeit von B.
Also kann keine echte Teilmenge $A \subsetneq B$ den Vektorraum V erzeugen.

$\square$ von (i) ⇒ (ii)

(ii)⇒(iii): Sei $B \subseteq V$ minimales Erzeugendensystem.

1. Schritt: z.z.: B ist linear unabhängig.

Sonst gäbe es $b_1, \dots, b_s \in B$, $b_i \neq b_j$ für $1 \leq i \neq j \leq s$ und $a_1, \dots, a_s \in K$ mit $0 = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s$ und $a_k \neq 0$ für ein k.

Ohne Einschränkung sei $k = 1$,

also $b_1 = -(b_2 a_2 a_1^{-1} + \dots + b_s a_s a_1^{-1})$.

Es folgt $b_1 \in \langle B - \{b_1\} \rangle$, also $\langle B - \{b_1\} \rangle = \langle B \rangle = V$,

ein Widerspruch. Folglich ist B linear unabhängig.

2. Schritt: z.z.: B ist maximale linear unabhängige Menge.

Sei $B \subsetneq B' \subseteq V$. Dann gibt es $b \in B' - B$.

Falls $b = 0$, ist B' linear abhängig. Sei also $b \neq 0$.

Es gibt $b_1, \dots, b_s \in B$, $a_1, \dots, a_s \in K$ mit $b = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s$, ohne Einschränkung $b_i \neq b_j$ für $1 \leq i \neq j \leq s$.

Es folgt $0 = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s + b \cdot \underbrace{(-1)}_{\neq 0}$,

also ist B' linear abhängig.

$\square$ von (ii)⇒(iii)

(iii)⇒(i): Sei $B \subseteq V$ maximale linear unabhängige Menge.

Zeige, dass B Erzeugendensystem ist.

Angenommen, $V \neq \langle B \rangle$. Dann gibt es $v \in V - \langle B \rangle$.

Beh.: $B \cup \{v\}$ ist linear unabh.

[Denn sonst gäbe es $w_1, \dots, w_s \in B \cup \{v\}$ mit $w_i \neq w_j$ für $1 \leq i \neq j \leq s$,

$a_1, \dots, a_s \in K$, $a_k \neq 0$ für ein k,

und $0 = w_1 a_1 + \dots + w_s a_s$.

Wäre $w_1, \dots, w_s \in B$, so wäre B schon linear abhängig, ↯.

Also gilt $w_l = v$ für ein l.

Wäre $a_\ell = 0$, so wäre wieder B linear abhängig, ↯.

Also $a_\ell \neq 0$, $v = -(w_1 a_1 a_\ell^{-1} + \ldots + w_{\ell-1} a_{\ell-1} a_\ell^{-1}$

$$+ w_{\ell+1} a_{\ell+1} a_\ell^{-1} + \ldots + w_s a_s a_\ell^{-1}),$$

also $v \in \langle B \rangle$, ein Widerspruch zu $v \in V - \langle B \rangle$.

[Also ist $B \cup \{v\}$ linear unabh., im Widerspruch zur Vor. an B.]

Also gilt $V = \langle B \rangle$.

$\square$ von (iii) $\Rightarrow$ (i).

$\square\square\square$