Vorlesung in Linearer Algebra 1 vom 17. Januar 2014

Wdh.: V ein endlichdim. K-VR, $B \subseteq V$ Basis von V.

- Für alle $v \in V$ und $b \in B$ ex. eindeutig $v_b \in K$ mit
$$v = \sum_{b \in B} b\, v_b$$
$$\rightsquigarrow V \cong K^n, \quad n = \dim(V) = \# B$$

- Können Abb. $\varphi : B \to W$, W ein weiterer K-VR, zu linearen Abb. $\hat{\varphi} : V \to W$ fortsetzen
$$\rightsquigarrow W^B \cong L(V, W)$$

- Wähle Basis C von W, wo W auch endlichdimensional. Betrachte für $b \in B$ die Koordinatendarstellung von $\varphi(b)$ bezüglich C, d.h.
$$\varphi(b) = \sum_{c \in C} c \cdot \underbrace{\varphi(b)_c}_{=: \varphi_{c,b}}$$
$$\rightsquigarrow \text{Tupel } (\varphi_{c,b})_{(c,b) \in C \times B}$$

Für $v \in V$, $v = \sum_{b \in B} b\, v_b$ gilt dann

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{b \in B} b\, v_b\Big) = \sum_{b \in B} \varphi(b)\, v_b = \sum_{b \in B} \sum_{c \in C} c \cdot \varphi_{c,b} \cdot v_b$$

Skalare

$$= \sum_{c \in C} c \Big(\sum_{b \in B} \varphi_{c,b}\, v_b\Big).$$

Sind allgemein B, C endliche Mengen,
so heißen die Elemente des K-Vektorraumes $K^{C\times B}$
Matrizen (mit Indexmenge $C \times B$).

Ist $B = \{1, \dots, m\}$ und $C = \{1, \dots, n\}$
schreibt man auch
$$K^{C\times B} = K^{n\times m}.$$
Die Elemente von $K^{n\times m}$ schreibt man
als rechteckiges Zahlenschema,
$$(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \qquad \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ist $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\#B = m$
und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, $\#C = n$, so gilt
$$K^{C\times B} \mathrel{\hat{=}} K^{n\times m}$$
$$(\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}} \mapsto (\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \quad \text{via } \varphi_{ij} = \varphi_{c_i, b_j}$$
(Isomorphie von $n\cdot m$-dimensionalen K-Vektorräumen).

$\boxed{12.}$ Definition und Satz

Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume
mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$.
Sei $\varphi : V \to W$. Wir definieren eine Matrix ${}_C M_B(\varphi) \in K^{C\times B}$
durch ${}_C M_B(\varphi) = (\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}}$,

wobei $\varphi(b) = \sum_{c\in C} c\,\varphi_{c,b}$ die Einträge $\varphi_{c,b}$ bestimmt.

<u>Satz</u>: Die Abbildung
$$L(V,W) \longrightarrow K^{C\times B}$$
$$\varphi \longmapsto {}_C M_B(\varphi)$$
ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

<u>Beweis:</u> (a) <u>Die Abbildung ist injektiv.</u>

Ist ${}_C M_B(\varphi) = {}_C M_B(\psi)$ für $\varphi, \psi \in L(V,W)$,

so folgt $\varphi(b) = \sum_{c\in C} c\,\varphi_{c,b} = \sum_{c\in C} c\,\psi_{c,b} = \psi(b)$ für

alle $b \in B$, also auch

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b v_b\Big) = \sum_{b\in B} \varphi(b) v_b = \sum_{b\in B} \psi(b) v_b$$
$$= \psi\Big(\sum_{b\in B} b v_b\Big) = \psi(v).$$

(b) <u>Die Abbildung ist surjektiv.</u>
Sei $(\varphi_{c,b}) \in K^{C\times B}$ eine Matrix. Definiere $\psi: V \to W$

durch $\psi\Big(\sum_{b\in B} b v_b\Big) = \sum_{c\in C} \sum_{b\in B} c\,\varphi_{c,b} v_b$.

Dann ist ψ linear (leichte Rechnung, vgl. 3.10)
und es gilt ${}_C M_B(\psi) = (\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}}$.

(c) Die Abbildung ist linear.

Sei $\varphi, \psi \in L(V,W)$ und $a \in K$. Für $v \in V$ beliebig gilt

$$(\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\,\varphi_{c,b} v_b + \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\,\psi_{c,b} v_b$$

$$= \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\,\underbrace{(\varphi_{c,b}+\psi_{c,b})}\,v_b, \text{ also } (\varphi+\psi)_{c,b} = \varphi_{c,b}+\psi_{c,b},$$

$$(\varphi\cdot a)(v) = \varphi(v)\cdot a = \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\,\varphi_{c,b} v_b\, a$$

$$= \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\,\underbrace{(\varphi_{c,b}\, a)}\, v_b, \text{ also } (\varphi\cdot a)_{c,b} = \varphi_{c,b}\cdot a$$

□

Man nennt ${}_C M_B(\varphi)$ auch Begleitmatrix der linearen Abbildung $\varphi: V \to W$ bezüglich der Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$.

Beachte: Wegen $K^{C\times B} \cong K^{n\times m}$ für $\#B = m$, $\#C = n$ kann man jede Matrix im $K^{n\times m}$ als Begleitmatrix einer linearen Abbildung lesen. Zum Beispiel als Abbildung $K^m \to K^n$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, $w_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} v_j$.

Korollar: Sind V, W endlichdimensionale K-Vektorräume, so gilt $\dim(L(V,W)) = \dim(V)\cdot\dim(W)$. □

$\boxed{13.}$ Explizite Rechnungen

Sei $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ und $C = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$.

Schreiben $\varphi_{ij} = \varphi_{c_i, b_j}$ und für $v \in V$

mit Koordinaten $(v_b)_{b \in B}$, $v_j = v_{b_j}$.

$$\begin{array}{cccccc} \text{n Zeilen} & \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nm} \end{pmatrix} \cdot & \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} & m & = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} & n \\ & \text{m Spalten} & & & & \end{array}$$

"Spaltenvektor"

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij} v_j = w_i}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \boxed{32} \end{pmatrix}$.

Die zugehörige lineare Abbildung $\varphi : K^3 \to K^2$

ist gegeben durch $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + 4y + 6z \end{pmatrix}$.

$\boxed{14.}$ Verknüpfungen von linearen Abbildungen und Multiplikation von Matrizen

Seien U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und seien
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & V \arrow[r, "\psi"] & W \end{tikzcd}$$
lineare Abbildungen.

Dann ist auch $\Psi \circ \varphi : U \to W$ linear.
Die Komposition von Abbildungen ist eine Abbildung

$$L(V,W) \times L(U,V) \longrightarrow L(U,W)$$
$$(\Psi, \varphi) \longmapsto \Psi \circ \varphi.$$

Diese Abbildung ist <u>nicht</u> linear, sondern <u>bilinear</u>:
es gilt für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(U,V)$
$\Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in L(V,W)$
$s \in K$:

$$\Psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \Psi \circ \varphi_1 + \Psi \circ \varphi_2$$
$$(\Psi_1 + \Psi_2) \circ \varphi = \Psi_1 \circ \varphi + \Psi_2 \circ \varphi$$
$$(\Psi \cdot s) \circ \varphi = (\Psi \circ \varphi) \cdot s = \Psi \circ (\varphi \cdot s)$$

Seien jetzt $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$ Basen.
Wie berechnet sich $\,_C M_A(\Psi \circ \varphi)$ aus

$\,_C M_B(\Psi)$ und $\,_B M_A(\varphi)$?

Einsetzen liefert die Antwort:

$$(\Psi \circ \varphi)(a) = \Psi(\varphi(a)) = \Psi\Big(\sum_{b \in B} b\, \varphi_{b,a}\Big) = \sum_{b \in B} \Psi(b)\, \varphi_{b,a}$$
$$= \sum_{b \in B} \sum_{c \in C} c\, \Psi_{c,b}\, \varphi_{b,a} = \sum_{c \in C} c \underbrace{\Big(\sum_{b \in B} \Psi_{c,b}\, \varphi_{b,a}\Big)}_{= (\Psi \circ \varphi)_{c,a}}$$

Es gilt also für alle $c \in C$
und $a \in A$, dass $\quad (\Psi \circ \varphi)_{c,a} = \sum_{b \in B} \Psi_{c,b}\, \varphi_{b,a}.$

Sind also C, B, A endliche Mengen, so definieren wir
eine Veknüpfung

$$K^{C\times B}\times K^{B\times A}\to K^{C\times A}$$

$$\left((\psi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}},(\varphi_{b,a})_{\substack{b\in B\\ a\in A}}\right)\mapsto(\xi_{c,a})_{\substack{c\in C\\ a\in A}}$$

$$\text{durch } \xi_{c,a}=\sum_{b\in B}\psi_{c,b}\,\varphi_{b,a}$$

die Matrixmultiplikation.

Bsp.: $\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{15.}$ Satz: Sind U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ und $C\subseteq W$ und sind

$$U\xrightarrow{\varphi}V\xrightarrow{\psi}W \quad \text{lineare}$$

Abbildungen, so gilt

$$_C M_A(\psi\circ\varphi)={}_C M_B(\psi)\cdot{}_B M_A(\varphi)$$

Matrix-multiplikation

$\square$