Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 17. Dezember 2013

Wdh.: Vor.: V, W K-Vektorräume, X Menge

- W^X mit $+$ und Skalarmult. ein K-VR
- $L(V,W) := \{f : V \to W \mid f \text{ linear}\} \subseteq W^V$ Unterraum
  $= \mathrm{Hom}(V,W)$
- $L(V,V) = \mathrm{End}(V)$ ist Ring bzgl $+, \circ$
- $GL(V) := \mathrm{End}(V)^*$ Gruppe bzgl. $\circ$
- $GL(K) \cong K^* = K - \{0\}$
  (↑ Gruppeniso)

18.

Geg. K-VR V, $W = K$,

$$V^* = V^\vee = L(V,K) \subseteq K^V \text{ ein Unterraum}$$

Wir nennen $V^\vee$ den Dualraum von V.

Ist $\xi \in V^\vee$, also $\xi : V \to K$ linear und ist ξ nicht die Nullabbildung, d.h. $\xi \neq 0$, dann ist ξ surjektiv.
Denn: es gibt dann ein $v \in V$ mit $\xi(v) = x \neq 0$,
also $\xi(v x^{-1}) = 1$, also $\xi(v x^{-1} a) = a$ für $a \in K$ beliebig.

Man nennt die Elemente von $V^\vee$ Linearformen auf V.
Der Kern einer Linearform $\xi \neq 0$ heißt Hyperebene in V.

Ist $H = \ker(\xi)$ und $\xi \neq 0$, so gilt nach dem Homomorphiesatz §2.13, dass $V/H \cong K$.

Beispiel: $V=\mathbb{R}^2$. Für jedes Paar $a,b\in\mathbb{R}^2$ ist dann die Abbildung $\xi_{a,b}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto ax+yb$ eine Linearform.

[Vgl. §2.8 Bsp. (a), $\varphi_m:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi_m(x,y)=y-mx$
dort: $\ker(\varphi_m)=G_{m,0}$]

Tatsächlich ist die Abbildung
$$\mathbb{R}^2\to(\mathbb{R}^2)^\vee,\quad (a,b)\mapsto \xi_{a,b}$$
linear und bijektiv [ÜA], also $(\mathbb{R}^2)^\vee\cong\mathbb{R}^2$.

---

§ 3: Erzeugendensysteme, Basen und Matrizen

Es sei V ein K-Vektorraum. Weiter seien $v_1,\dots,v_s\in V$ Vektoren und $a_1,\dots,a_s\in K$ Skalare. Dann nennt man $v=v_1a_1+\dots+v_sa_s$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1,\dots,v_s$.

Satz §1.7 besagt: ist $X\subseteq V$ eine Teilmenge, dann besteht das Erzeugen $\langle X\rangle$ aus allen Linearkombinationen von Vektoren aus $X\cup\{0\}$,

d.h. $\langle X\rangle=\{x_1a_1+\dots+x_sa_s \mid s\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_s\in X\cup\{0\},\ a_1,\dots,a_s\in K\}$.

Wenn $\langle X\rangle=V$, dann heißt X Erzeugendensystem für V.

Im allgemeinen gibt es viele verschiedene Erzeugendensysteme für einen gegebenen Vektorraum. Es gilt zum Beispiel immer $V=\langle V\rangle=\langle V-\{0\}\rangle$.

Wir betrachten in diesem Kapitel <u>minimale</u> Erzeugendensysteme.
Wir heißt "minimal" hier?

$\boxed{1.}$ <u>Def.</u> Sei M eine Menge und sei P eine Menge von Teilmengen von M, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$.

- Eine Menge $A \in P$ heißt <u>minimal</u> (in P), wenn es kein $B \in P$ gibt mit $B \subsetneq A$,
- eine Menge $A \in P$ heißt <u>maximal</u> (in P), wenn es kein $B \in P$ gibt mit $A \subsetneq B$.

<u>Bsp.</u>: In $P = \mathcal{P}(M)$ ist $\emptyset$ minimal und M ist maximal.

<u>Bsp.</u>: $P = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$, $M = \{1,2,3\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{maximal} \rightarrow \{1,2\} & & \{1,3\} \leftarrow \text{maximal} \\
& \{1\} \arrow[ul, phantom, "\subseteq" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subseteq" sloped] & \\
& \emptyset \leftarrow \text{minimal} \arrow[u, phantom, "\subseteq" sloped] &
\end{tikzcd}$$

Ist V ein Vektorraum, so heißt ein Erzeugendensystem $E \subseteq V$ <u>minimales Erzeugendensystem</u>, wenn E minimal in der Menge aller Erzeugendensysteme von V ist, wenn es also kein Erzeugendensystem $F \subseteq V$ gibt $F \subsetneq E$.

<u>Beispiel</u>: $V = \mathbb{R}^2$, $E = \{(0,1), (1,0)\}$.
Es gilt $(x,y) = (0,1)y + (1,0)x$, also ist E ein Erzeugendensystem. Offensichtlich gilt

$$\langle \{(0,1)\} \rangle = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$$
$$\langle \{(1,0)\} \rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2,$$
$$\langle \emptyset \rangle = \{(0,0)\},$$

also ist E ein minimales Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

Dagegen ist $F = \{(1,0), (1,1), (1,3)\}$
nicht minimal: $(1,0)\cdot(-2) + (1,1)\cdot 3 = (1,3)$,
ist auch $F - \{(1,3)\} = \{(1,0), (1,1)\}$ ein
Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^2$.

Beobachtung: Ist $X \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und ist $X \subseteq Y \subseteq V$, so ist auch Y ein Erzeugendensystem.

$\boxed{2.}$ Def.: Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt linear abhängig, wenn es Vektoren $v_1, \dots, v_s \in X$ gibt, mit $v_j \neq v_i$ für $i \neq j$, (d.h. die $v_1, \dots, v_s$ sind paarweise verschieden) und Skalaren $a_1, \dots, a_s \in K$ gibt,
so dass gilt: (i) $0 = v_1 a_1 + \dots + v_s a_s$
(ii) es gibt ein j mit $a_j \neq 0$.

Beispiele: • $X = \{0\}$ ist linear abhängig, denn $0 = 0 \cdot 1$.
$(s=1, v_1 = 0, a_1 = 1)$

• Die Menge $F = \{(1,0), (1,1), (1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist linear abhängig, denn $(0,0) = (1,0)\cdot\underline{(-2)} + (1,1)\cdot\underline{3} + (1,3)\cdot\underline{(-1)}$.

Ist $X \subseteq V$ nicht linear abhängig, dann heißt X linear unabhängig.

Dies bedeutet folgendes:
ist $v_1, \dots, v_s \in X$, $a_1, \dots, a_s \in K$, $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$,
und gilt $0 = v_1 a_1 + \dots + v_s a_s$, so folgt daraus
$a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$.

Beispiele: • $\emptyset \subseteq V$ ist linear unabhängig.
• wenn gilt $0 \in X \subseteq V$, dann ist X linear abhängig [ÜA].

- $\{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig:
  $(1,0)x + (0,1)y = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

<u>Beobachtung:</u> Ist $X \subseteq V$ linear unabhängig, so ist auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ linear unabhängig.