Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 14. Januar 2014

Wdh.:
- Jeder VR hat eine Basis.
- Existiert eine Basis endl. Länge, so heißt der VR endlich-dimensional.
- Alle Basen haben dieselbe Länge, in einem endl. dim. VR V nennt man diese Länge die Dimension von V, kurz: $\dim(V)$.
- Dimensionsformeln:
  - W ein endl. dim. VR, $U \subseteq W$ ein UVR $\Rightarrow \dim W = \dim U + \dim W/U$
  - $\varphi : V \to W$ lin. Abb., V endl. dim. $\Rightarrow \dim V = \dim \varphi(V) + \dim \ker \varphi$
  - $\varphi : V \to W$ " , W endl. dim. $\Rightarrow \dim W = \dim \varphi(V) + \dim \operatorname{cok} \varphi$

  A: $\varphi : V \to W$ " injektiv, $\dim V = \dim W \Rightarrow \varphi$ Isomorphismus
  B: " " surjektiv, " $\Rightarrow$ "
- $\varphi : V \to W$ Isomorphismus $\Rightarrow$ φ bildet Basis von V auf Basis von W ab

---

Erinnerung: Ist M eine (nichtleere) Menge und K ein Körper, so bezeichnet K^M den K-Vektorraum aller Abbildungen $M \to K$.
Wir definieren $K^{\emptyset} = \{0\} = K^0$.
Wenn M endlich ist, $M = \{m_1, \dots, m_n\}$, dann sind die Elemente von K^M Tupel $(a_{m_1}, \dots, a_{m_n})$ mit $a_{m_i} \in K$, vgl. §0.11.
Die Abbildung
$$(a_1, \dots, a_n) \longrightarrow (a_{m_1}, \dots, a_{m_n})$$
$$a_i \longmapsto a_{m_i}$$
ist offensichtlich ein Isomorphismus $K^n \cong K^M$, $n = \# M$, und mit unserer Konvention stimmt das auch für $M = \emptyset$ und $n = 0$.

8. Basen und Koordinaten

Lemma: Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $B \subseteq V$ eine Basis. Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Skalare $(v_b)_{b \in B}$, so dass gilt $v = \sum_{b \in B} b v_b$.

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (2,-1)\}$.
Dann $v = (1,1) \cdot v_{(1,1)} + (2,-1) \cdot v_{(2,-1)}$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$,
z.B. $v = (1,-2)$, dann ist $\underbrace{(1,-2)}_{v} = (1,1) \cdot \underbrace{(-1)}_{v_{(1,1)}} + (2,-1) \cdot \underbrace{1}_{v_{(2,-1)}}$

Beweis: Da B ein Erzeugendensystem für V ist, existieren jedenfalls solche Skalare, vgl. § 2.7.
Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit.
Angenommen $\sum_{b \in B} b v_b = \sum_{b \in B} b v'_b$ für Skalare $v_b, v'_b \in K$.

Es folgt $\sum_{b \in B} b (v_b - v'_b) = 0$.

Da B linear unabhängig ist, folgt $v_b - v'_b = 0$ für alle $b \in B$. $\square$

Die Skalare v_b nennt man Koeffizienten oder Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis B.

Jeder Vektor $v \in V$ bestimmt also ein eindeutiges Tupel $(v_b)_{b \in B}$ von Koeffizienten: wir ordnen jedem Vektor auf diese Weise ein Element von K^B zu.

Satz: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B. Dann ist die Abbildung $\varphi : V \to K^B$, $\varphi(v) = (v_b)_{b \in B}$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis:

- Ist $(v_b)_{b\in B}$ ein Tupel von Skalaren,
  so setzen $\Psi((v_b)_{b\in B}) = \sum_{b\in B} b v_b \in V$.

Es gilt $\varphi\circ\Psi((v_b)_{b\in B}) = (v_b)_{b\in B}$, $\Psi\circ\varphi(v) = v$.
Also ist φ bijektiv mit Umkehrabbildung Ψ.

- Es gilt für $v, w \in V$:

$$\varphi(v+w) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b v_b + \sum_{b\in B} b w_b\Big) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b(v_b+w_b)\Big)$$

$$= (v_b+w_b)_{b\in B} \underset{\uparrow \atop \S 2.2}{=} (v_b)_{b\in B} + (w_b)_{b\in B} = \varphi(v)+\varphi(w)$$

- und für $a\in K$, $v\in V$:

$$\varphi(v\cdot a) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b(v_b a)\Big) = (v_b a)_{b\in B} = (v_b)_{b\in B}\cdot a = \varphi(v)\cdot a. \qquad \square$$

$\boxed{9.}$ Korollar (Hauptsatz über endlichdimensionale Vektorräume):

Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum,
so haben wir einen Isomorphismus $V \cong K^n$.

Beweis: Wir haben Isomorphien $V \underset{\uparrow \atop \text{Satz } \boxed{8.}}{\xrightarrow{\cong}} K^B \underset{\uparrow \atop \text{Erinnerung}}{\xrightarrow{\cong}} K^n$,

wo $B \subseteq V$ Basis mit $\# B = n$. $\square$

Lineare Abbildungen lassen sich gut mit Basen beschreiben.

$\boxed{10.}$ Satz: Seien V und W K-Vektorräume, sei V endlichdimensional mit Basis $B\subseteq V$.

(i) Zu jeder Abbildung $\varphi : B \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\hat{\varphi} : V \to W$ mit $\hat{\varphi}(b) = \varphi(b)$ für alle $b \in B$.

(ii) Jede lineare Abbildung $V \to W$ erhält man auf diese Weise.

(iii) Die Abbildung $W^B \to L(V,W)$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist ein linearer Isomorphismus.

<u>Bsp.:</u> $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (2,-1)\}$.

Die Angaben $\varphi(1,1) = (1,3)$ und $\varphi(2,-1) = (2,4)$ legen die lineare Abbildung $\hat{\varphi} : V \to W$ fest mit

$$\hat{\varphi}(v) = (1,3) \cdot v_{(1,1)} + (2,4) \cdot v_{(2,-1)}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi \in W^B$, also $\varphi : B \to W$. Wir definieren

$$\hat{\varphi}\Big(\sum_{b \in B} b\, v_b\Big) = \sum_{b \in B} \varphi(b) \cdot v_b, \quad \hat{\varphi} : V \to W.$$

<u>Zu (iii):</u> • <u>Z.z.: $\hat{\varphi} \in L(V,W)$.</u>

Es gilt $\hat{\varphi}(v+w) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{b \in B} b\, v_b + \sum_{b \in B} b\, w_b\Big) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{b \in B} b\,(v_b + w_b)\Big)$

$$= \sum_{b \in B} \varphi(b) \cdot (v_b + w_b) = \sum_{b \in B} \varphi(b) v_b + \sum_{b \in B} \varphi(b) w_b = \hat{\varphi}(v) + \hat{\varphi}(w)$$

und $\hat{\varphi}(va) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{b \in B} b\,(v_b a)\Big) = \sum_{b \in B} \varphi(b)(v_b a) = \hat{\varphi}(v) \cdot a$,

also ist $\hat{\varphi} \in L(V,W)$.

• <u>Abb. injektiv:</u> Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in W^B$. Wenn gilt $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$, so gilt $\varphi_1(b) = \hat{\varphi}_1(b) = \hat{\varphi}_2(b) = \varphi_2(b)$ für alle b, also $\varphi_1 = \varphi_2$, d.h. die Abbildung $W^B \to L(V,W)$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist injektiv.

• Abb. surjektiv:

Ist $\psi: V \to W$ linear, so setze $\varphi(b) = \psi(b)$ für $b \in B$.
Es folgt wegen der Linearität von ψ, dass $\hat{\varphi} = \psi$
[denn $\psi(v) = \psi(\sum_{b\in B} b v_b) = \sum_{b\in B} \psi(b) v_b = \sum_{b\in B} \varphi(b) v_b = \hat{\varphi}(v)$.]

• Also ist die Abbildung $W^B \to L(V,W)$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$, bijektiv.
Sie ist auch linear:
Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in W^B$ und $a \in K$, $v \in V$. Dann gilt

$$\widehat{(\varphi_1 \cdot a)}(v) = (\hat{\varphi}_1 \cdot a)(v) \qquad \text{[Einsetzen...]}$$

und $$\widehat{(\varphi_1 + \varphi_2)}(v) = (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)(v) \qquad \text{[Einsetzen...]}$$

Damit ist (iii) gezeigt. Aber (i) und (ii) folgt direkt aus (iii). $\square$

Wir verfeinern diesen Isomorphismus $W^B \cong L(V,W)$, wenn W auch eine endliche Basis C hat wie folgt.

$\boxed{11.}$ Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$.
Für $b \in B$ betrachte die Koordinaten von $\varphi(b)$,

$$\varphi(b) = \sum_{c\in C} c \cdot \underline{\varphi(b)_c}. \quad \text{Wir setzen } \varphi_{c,b} = \varphi(b)_c.$$

Dann ist $(\varphi_{c,b})_{(c,b)\in C\times B}$ ein Tupel mit Indexmenge $C \times B$.

<u>Bsp.:</u> $K=\mathbb{R}$, $V=W=\mathbb{R}^2$, $B=\{(1,1),(2,-1)\}$, $C=\{(-1,0),(1,3)\}$.

Durch die Angabe

$$\varphi(1,1)=(1,3),\quad \varphi(2,-1)=(4,6)$$

wird eine lineare Abb. $\varphi: V\to W$ festgelegt.

$$\varphi(1,1)=(1,3)=(-1,0)\cdot 0+(1,3)\cdot 1$$
$$\varphi(2,-1)=(4,6)=(-1,0)\cdot(-2)+(1,3)\cdot 2$$

Dann:

$$\varphi(1,1)_{(-1,0)}=0,\quad \varphi(1,1)_{(1,3)}=1,$$

$$\varphi(2,-1)_{(-1,0)}=-2,\quad \varphi(2,-1)_{(1,3)}=2$$