Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 13. Dezember 2013

Wdh.: V, W K-Vektorräume, $\varphi: V \to W$
Homomorphiesatz: $V/\ker(\varphi) \cong \varphi(V)$

• **Bsp.:** $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $\varphi: V \to W$, $(x,y) \mapsto x-y$
$\ker(\varphi) = U = \langle (1,1) \rangle$, φ surjektiv
Hom.'satz $\Rightarrow$ $V/U = V/\ker(\varphi) \cong \varphi(V) = W = \mathbb{R}$

• **Bsp.:** §2.8 (b): $\Psi_m : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, mx)$
$G_{m,0} = \Psi_m(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{R}/\underbrace{\ker(\Psi_m)}_{=\{0\}} \cong \mathbb{R}$

Wir wenden den Homomorphiesatz auf Lineare Gleichungen an.

$\boxed{14.}$ **Definition:** Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Sei $b \in W$.
Dann nennt man $\varphi(x) = b$ eine lineare Gleichung (oder Lineares Gleichungssystem).

Wir interessieren uns für die Lösungsmenge
$$L = \{x \in V \mid \varphi(x) = b\} = \varphi^{-1}(b)$$
und dafür wie man sie findet.
Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \\ V/\ker(\varphi) \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}, \quad \bar{\varphi}(v + \ker(\varphi)) = \varphi(v).$$

Nach §2.13 [Korollar A] ist $\bar{\varphi}$ injektiv.

Es gibt offensichtlich zwei Fälle:
Fall 1: $b \notin \varphi(V)$, es gibt keine Lösungen, $L = \emptyset$.

Fall 2: $b \in \varphi(V)$, dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = b$ (also $v \in L$). Dann gilt

$$\bar{\varphi}^{-1}(b) = \{v + \ker(\varphi)\}, \text{ weil } \bar{\varphi} \text{ injektiv ist}$$

(genau ein Urbild, die Nebenklasse $v + \ker(\varphi)$).

Dann ist

$$\varphi^{-1}(b) \underset{\substack{\uparrow \\ [\text{Diagramm}]}}{=} \pi^{-1}(v + \ker(\varphi)) = v + \ker(\varphi),$$

vgl. §2.12 [Def. π, dort wurde $\pi^{-1}(v+U) = v + U$ gezeigt].

Es gilt dann also $L = v + \ker(\varphi) = \{v + u \mid u \in \ker(\varphi)\}$.

Die <u>Lösungsstrategie</u> einer linearen Gleichung ist also
(a) bestimme $\ker(\varphi)$,
(b) finde <u>eine</u> Lösung $v \in V$.
Dann ist $L = v + \ker(\varphi)$ die Menge aller Lösungen.

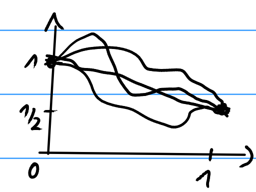
Wichtiger Spezialfall: $b = 0$. Da <u>immer</u> gilt $0 \in \varphi(V)$, ist die Lösungsmenge dann nicht leer, wir sind also in Fall 2, und $L = \ker(\varphi)$.

Für konkrete Rechnungen sind oft Matrizen hilfreich – das kommt im nächsten Kapitel.

<u>Beispiele:</u> (a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $\varphi: V \to W$, $\varphi(x,y) = 2x - y$ ist lineare Abbildung. Sei $b = -1$.
Es gilt $\varphi(0,1) = -1$, $\ker(\varphi) = \{(x,y) \mid 2x - y = 0\}$
$= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Die Lösungsmenge der linearen Gleichung $2x - y = -1$ ist also $L = (0,1) + \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $V = \mathbb{R}^X$.
Gesucht sind Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = \frac{1}{2}$.
Betrachten dazu
$$\varphi : \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f \longmapsto (f(0), f(1)),$$
das ist eine lineare Abbildung.
Der Kern von φ besteht aus allen Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(1) = 0$.
Eine Lösung ist $f(t) = -\frac{1}{2}t + 1$.
Die Menge aller Lösungen ist also
$$L = f + \{ g : [0,1] \to \mathbb{R} \mid g(0) = g(1) = 0 \}.$$



Auf die effektive Berechnung von L kommen wir später zurück.

$\boxed{15.}$ Räume von linearen Abbildungen

Sei W ein K-Vektorraum und X eine nichtleere Menge. Dann ist (ähnlich wie in §2.4) die Menge W^X aller Abbildungen $f : X \to W$ ein K-Vektorraum, wenn man setzt
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fa)(x) = f(x) \cdot a,$$
für $f, g \in W^X$, $a \in K$, $x \in X$. [Beweis: ÜA]

Sei jetzt V ein weiterer K-Vektorraum.
Dann ist also die Menge aller Abbildungen $f : V \to W$ ein K-Vektorraum. Wir betrachten jetzt die Teilmenge aller linearen Abbildungen $L(V,W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ ist linear} \}$.
"K-Homomorphismen von V nach W"

Lemma: $L(V,W) \subseteq W^V$ ist ein Unterraum und insbesondere ein K-Vektorraum.

Beweis: Die Nullabbildung $V \to W$, $v \mapsto 0$ ist linear, also in $L(V,W)$.

Sei $a, b \in K$, $v, v' \in V$, $f, g \in L(V,W)$. Dann

- $(f+g)(v+v') = f(v+v') + g(v+v') = f(v) + f(v') + g(v) + g(v')$
  $= (f+g)(v) + (f+g)(v')$,
- $(f+g)(va) = f(va) + g(va) = (f(v)+g(v))a = (f+g)(v)a$,

also $f+g \in L(V,W)$.

Weiter
- $(-f)(v+v') = -f(v+v') = -f(v) - f(v') = (-f)(v) + (-f)(v')$
- $(-f)(va) = -f(va) = -f(v)a = (-f)(v)a$,

also $-f \in L(V,W)$.

Weiter
- $(f \cdot b)(v+v') = f(v+v')b = f(v)b + f(v')b = (fb)(v) + (fb)(v')$
- $(f \cdot b)(va) = f(va)b = f(v)ab \underset{!}{=} f(v)ba = (fb)(v)a$,

also ist $fb \in L(V,W)$.

Damit ist gezeigt, dass $L(V,W) \subseteq W^V$ ein Unterraum ist. $\square$

$\boxed{16.}$ Der Endomorphismenring eines Vektorraums

Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist nach §2.15 die Menge $L(V,V)$ ein K-Vektorraum. Nach §1.2 ist $L(V,V)$ zusätzlich eine Halbgruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, denn Hintereinanderausführungen von linearen Abbildungen sind wieder linear: ist $f, g \in L(V,V)$, so ist auch $f \circ g : V \to V$ linear. Die Identität id_V ist dabei das Neutralelement.

Lemma: $L(V,V)$ ist ein Ring mit der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen als Multiplikation.

Beweis: Wir wissen schon, dass $(L(V,V),+)$ eine abelsche Gruppe ist (sogar ein K-Vektorraum).
Für $f,g,h \in L(V,V)$ und $v \in V$ gilt
- $(f\circ(g+h))(v) = f((g+h)(v)) = f(g(v)+h(v)) = f\circ g(v) + f\circ h(v)$
- $((f+g)\circ h)(v) = (f+g)(h(v)) = f(h(v)) + g(h(v)) = (f\circ h + g\circ h)(v)$.

□

Diesen Ring nennt man den Endomorphismenring von V,
$End(V) = L(V,V)$.
Die Einheitengruppe dieses Ringes ist die generelle lineare Gruppe

$$GL(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ linear und bijektiv}\}$$
$$= End(V)^*.$$

Der Ring $End(V)$ und die Gruppe $GL(V)$ werden im Folgenden immer wieder auftauchen.

$\boxed{17.}$ Beispiel: $V = K$.
Eine lineare Abbildung $\varphi : K \to K$ ist eindeutig festgelegt durch $\varphi(1)$, dann $\varphi(a) = \varphi(1\cdot a) = \varphi(1)\cdot a$.
Die Abbildung

$$h : End(V) \to K$$
$$\varphi \mapsto \varphi(1)$$

ist ein bijektiver Homomorphismus von Ringen,
denn: $h(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(1) = \varphi(1)+\psi(1) = h(\varphi)+h(\psi)$,

$$h(\varphi\circ\psi) = (\varphi\circ\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(1\cdot\underbrace{\psi(1)}_{=:a}) = \varphi(1)\cdot a$$
$$= \varphi(1)\cdot\psi(1) = h(\varphi)\cdot h(\psi).$$

In diesem Fall gilt $End(V) \underset{\text{Ringiso}}{\cong} K$ und $GL(V) \underset{\text{Gruppeniso}}{\cong} K^* = K - \{0\}$.

$\boxed{18.}$ Der Dualraum

Ein ganz anderes Beispiel ist der Fall, wo V ein beliebiger K-Vektorraum ist und $W = K$.
Man nennt $L(V, K)$ den Dualraum von V und schreibt dafür

$$V^* = V^\vee = L(V, K) \quad [\subseteq K^V].$$