Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 10. Dezember 2013

$\boxed{11.}$

Wdh.: Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ UVR.

Def. $$V/U = \{ v + U \mid v \in V \},$$

ist abelsche Gruppe $(v+U) + (v'+U) = (v+v') + U$

Man nennt V/U den <u>Quotienten(raum) von V modulo U</u>.

<u>Satz:</u> Ist V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist auch V/U ein K-Vektorraum mit Skalarmultiplikation $(v+U)\cdot a = va + U$.

<u>Beweis:</u> Wir müssen zuerst zeigen, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Angenommen, $v + U = v' + U$.
Dann gilt nach §1.15 [Lemma] $v - v' \in U$,
also auch $(v-v')a \in U$, also $va - v'a \in U$,
also $va + U = v'a + U$.

Die Eigenschaften (i)-(iv) sind jetzt einfach:

(i) $((v+U) + (w+U))\cdot a = (v+w+U)a$
$= va + wa + U = (v+U)a + (w+U)a$

(ii) $(v+U)(a+b) = v(a+b) + U = va + vb + U$
$= (va + U) + (vb + U).$

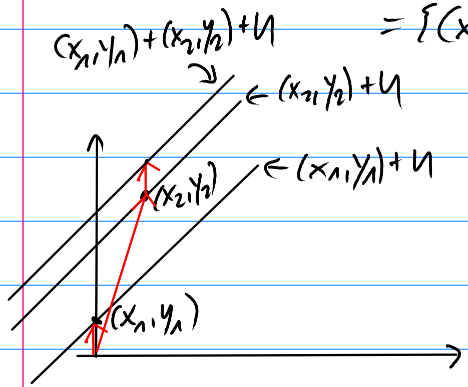
(iii) $(v+U)(a\cdot b) = v(ab) + U = (va)b + U = (va+U)b = ((v+U)a)\cdot b$

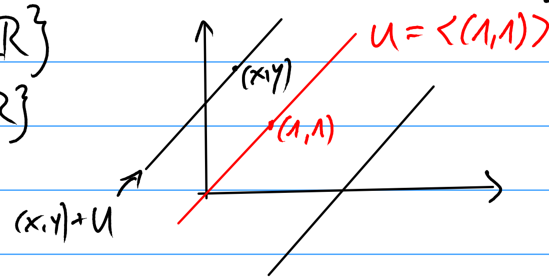
(iv) $(v+U)\cdot 1 = v \cdot 1 + U = v + U.$

$\square$

Bsp.: $V=\mathbb{R}^2$, ist $\mathbb{R}$-VR, $U=\langle(1,1)\rangle=\{(z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$

$$V/U=\{\underbrace{(x,y)+U}_{=\{(x+z,\,y+z)\mid z\in\mathbb{R}\}}\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$





$\boxed{12.}$ Definition: Sei V ein K-Vektorraum und sei $U\subseteq V$ ein Unterraum. Wir definieren eine Abbildung $\pi: V\to V/U$ durch $\pi(v)=v+U$

Satz: Die so definierte Abbildung ist linear und surjektiv. Man nennt π die Kanonische Quotientenabbildung $\pi: V\to V/U$. Es gilt $\pi^{-1}(v+U)\overset{!}{=}v+U$ für alle $v\in V$.

Beweis: Das ist klar:

$$\pi(v+w)=v+w+U=v+U+w+U=\pi(v)+\pi(w)$$

$$\pi(va)=va+U=(v+U)a=\pi(v)a,$$

also ist π linear. Dass π surjektiv ist, ist auch klar.

Weiter:

$w\in\pi^{-1}(v+U)\Leftrightarrow \pi(w)=w+U=v+U \Leftrightarrow w-v\in U\Leftrightarrow w\in v+U$,

also „$\subseteq$" in Beh. „$\overset{!}{=}$" und „$\supseteq$" entsprechend. $\square$

Bem.: $\pi: V\to V/U$, $v\mapsto v+U$ ordnet jedem $v\in V$ die Nebenklasse zu, die von v repräsentiert wird.

13. Theorem (Homomorphiesatz für Vektorräume)

Es seien V, W zwei K-Vektorräume und es sei $\varphi: V \to W$ linear. Weiter sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $U \subseteq \ker(\varphi)$.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}: V/U \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, wobei $\pi: V \to V/U$ die Kanonische Quotientenabbildung ist.

Die Aussage des Satzes wird übersichtlicher als Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \\
V/U \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$$

Beweis:

- Existenz von $\overline{\varphi}$: Definiere $\boxed{\overline{\varphi}(v+U) = \varphi(v)}$.

Das ist wohldefiniert: angenommen, $v + U = v' + U$.
Dann gilt $v - v' \in U \subseteq \ker(\varphi)$, also $\varphi(v - v') = 0$,
also $\varphi(v) = \varphi(v')$.

Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist linear, weil φ linear ist:

$$\overline{\varphi}(v+U+w+U) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \overline{\varphi}(v+U) + \overline{\varphi}(w+U)$$

$$\overline{\varphi}((v+U)\cdot a) = \overline{\varphi}(va+U) = \varphi(va) = \varphi(v)a = \overline{\varphi}(v+U)\cdot a.$$

Klar: $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ aufgrund der Def. von $\overline{\varphi}$.

- Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$: Angenommen, $S: V/U \to W$ ist eine weitere lineare Abbildung mit $S \circ \pi = \varphi$. Es folgt $S(v+U) = \varphi(v) = \overline{\varphi}(v+U)$ für alle $v \in V$, also $S = \overline{\varphi}$. $\square$

Bsp.: $V=\mathbb{R}^2$, $U=\langle(1,1)\rangle$, $W=\mathbb{R}$, $\varphi: V\to W$, $\varphi(x,y)=x-y$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^2/U \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Hier liegt U im Kern von φ, d.h. $U\subseteq \ker(\varphi)$ da $\varphi(z,z)=z-z=0$ für alle $z\in\mathbb{R}$.

Es gibt genau eine Abb. $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^2/U\to\mathbb{R}$ mit $\bar{\varphi}\circ\pi=\varphi$ laut Homomorphiesatz.

Hier: $\bar{\varphi}((x,y)+U)=\varphi(x,y)=x-y$.

Bem.: φ surjektiv $\Rightarrow$ $\bar{\varphi}$ surjektiv $[\bar{\varphi}\circ\pi=\varphi \checkmark]$

Argumenten mit Kommutativen Diagrammen werden Sie im Mathematikstudium immer wieder begegnen. Der Homomorphiesatz ist ein zentraler Satz der Algebra.

Korollar A: Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist genau dann injektiv, wenn gilt $U=\ker(\varphi)$.

Beweis: Es gilt $\bar{\varphi}(v+U)=0 \Leftrightarrow \varphi(v)=0 \Leftrightarrow v\in\ker(\varphi)$.

- Angenommen, $U=\ker(\varphi)$. Ist dann $\bar{\varphi}(v+U)=0$, so folgt $v\in U$, also $v+U=0+U=U$, also $\ker(\bar{\varphi})=\{U\}$.
- Angenommen, $U\neq\ker(\varphi)$. Dann gibt es $v\in\ker(\varphi)-U$, es folgt $v+U\neq U$, aber $\bar{\varphi}(v+U)=\varphi(v)=0=\varphi(0)=\bar{\varphi}(U)$, also ist $\bar{\varphi}$ dann nicht injektiv. $\square$

Korollar B: Ist $U=\ker(\varphi)$, dann ist die Abbildung $\bar{\varphi}: V/U\to\varphi(V)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen (d.h. linear und bijektiv).

Also: $V/\ker(\varphi)\cong\varphi(V)$.