Vorlesung in Linearer Algebra 1 vom 7. Januar 2014

Wdh.: Sei V ein K-Vektorraum.

- $B \subseteq V$ Basis $\Leftrightarrow \langle B \rangle = V$ und B linear unabhängig
$\Leftrightarrow V = \{ x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s \mid s \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_s \in B, a_1, \ldots, a_s \in K \}$
und für alle $v_1, \ldots, v_s \in B$, $a_1, \ldots, a_s \in K$, die $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, gilt:
$v_1 a_1 + \ldots + v_s a_s = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_s = 0$

- B Basis $\Leftrightarrow$ B minimales Erzeugendensystem
$\Leftrightarrow$ B maximale linear unabhängige Menge

Wir werden sehen, dass manche Rechnungen in der Linearen Algebra einfacher werden, wenn man mit Basen arbeitet (manches wir dadurch aber auch unübersichtlich). Zuerst klären wir, dass es in jedem Vektorraum Basen gibt. Dazu brauchen wir Hilfsmittel der Mengenlehre (vgl. Kapitel 0), das Lemma von Zorn.

4. Das Lemma von Zorn

Es sei M eine Menge und P eine Menge von Teilmengen von M, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$.

- Erinnerung: eine Menge $A \in P$ heißt maximal in P, wenn es kein $B \in P$ gibt mit $A \subsetneq B$.
- Eine Teilmenge $C \subseteq P$ heißt Kette, falls für alle $A, B \in C$ gilt: $A \subseteq B$ oder $A \supseteq B$. ("es geht immer bergauf")

- Ist C eine Kette und ist $B \in P$, dann heißt B obere Schranke von C, wenn $A \subseteq B$ für alle $A \in C$ gilt.

Bsp.: $M = \{1,2,3\}$, $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

$$\begin{array}{ccccc}
\text{max. El.} \rightarrow \{1,2\} & & & & \{2,3\} \leftarrow \text{max. El.} \\
\supseteq & & \cup\!\!\mid & \supseteq & \\
\{1\} & & \{2\} & & \\
\cup\!\!\mid & \supseteq & & & \\
\emptyset \leftarrow \text{min. El.} & & & &
\end{array}$$

Kette:

z.B. $C = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\} \rightarrow \{1,2\}$ ist o.S.

oder $C = \{\{1\}, \{1,2\}\} \rightarrow$ "

oder $C = \{\{2\}, \{2,3\}\} \rightarrow \{2,3\}$ ist o.S.

oder $C = \{\emptyset, \{2\}\} \rightarrow \{2,3\}$ ist o.S.

bzw. $\{1,2\}$ ist o.S

bzw. $\{2\}$ ist o.S

Lemma (Max Zorn 1935, Felix Hausdorff 1914):
Sei M eine Menge, sei $\emptyset \neq P \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Wenn jede Kette $C \subseteq P$ eine obere Schranke hat, dann gibt es in P maximale Elemente.

Zorns Lemma beweist man mit dem Auswahlaxiom. Wir machen das später, zuerst benutzen wir es, um die Existenz von Basen zu zeigen.

$\boxed{5.}$ Das Ergänzungslemma

Es sei V ein K-Vektorraum und es sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem, d.h. $\langle E \rangle = V$. Weiter sei $T \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Dann gibt es eine Menge $S \subseteq E - T$ so, dass $T \cup S$ eine Basis von V ist.
["T wird um Elemente von E zu einer Basis ergänzt."]

<u>Beweis:</u> Sei P die Menge aller Teilmengen $X \subseteq V$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $X \subseteq T \cup E$
(ii) $T \subseteq X$
(iii) X ist linear unabhängig.

(Es gilt also $T \in P$, also $P \neq \emptyset$).

[Betr. alle linear unabhängigen Teilmengen X von V, die T enthalten und in $T \cup E$ liegen. $\rightsquigarrow P$
Strategie: wenden Zorn an auf $P \rightsquigarrow$ erhalten maximale Elemente in P. Von diesen zeigen wir, dass sie Basen sind.]

<u>Behauptung 1): in P gibt es maximale Elemente</u>

Ist $C \subseteq P$ eine Kette, so betrachte $\hat{C} = \bigcup C$. z.z. $\hat{C} \in P$ für Zorn.
Da für jedes $X \in C$ gilt $T \subseteq X \subseteq T \cup E$,
folgt $T \subseteq \hat{C} \subseteq T \cup E$. [$\rightsquigarrow$ (i) und (ii) erfüllt für $\hat{C}$]
Weiter ist $\hat{C}$ linear unabhängig. [$\rightsquigarrow$ (iii) erfüllt]
⌈Denn ist $v_1, \ldots, v_s \in \hat{C}$, $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ und gilt $v_1 a_1 + \ldots + v_s a_s = 0$, so gibt es $A_i \in C$ mit $v_i \in A_i$. Da C Kette ist, können wir die Indizes i so ändern, dass gilt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_s$, also $v_1, \ldots, v_s \in A_s$.
Aber A_s war nach Voraussetzung linear unabhängig.
Es folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$.
Damit ist $\hat{C}$ linear unabhängig.⌋

Also $\hat{C} \in P$.
Für jedes $A \in C$ gilt $A \subseteq \hat{C}$, also ist $\hat{C}$ obere Schranke von C.
Nach <u>Zorns Lemma</u> §3.4 gibt es in P (mindestens) ein maximales Element $B \in P$.

$\square$ (Beh. 1)

<u>Behauptung 2):</u>

Wegen $B \in P$ ist B linear unabhängig,
wir müssen noch zeigen, dass B ein Erzeugendensystem ist.
Wenn das falsch wäre, gäbe es einen Vektor $v \in E - \langle B \rangle$
(denn $V = \langle E \rangle$; wenn $E \subseteq \langle B \rangle$, so $\langle B \rangle = V$).

Beh.: Dann wäre $\{v\} \cup B$ linear unabhängig.

⌈<u>Denn:</u> Sei $w_1, \ldots, w_s \in \{v\} \cup B$, $a_1, \ldots, a_s \in K$ mit
$w_1 a_1 + \ldots + w_s a_s = 0$ und $w_i \neq w_j$ für $i \neq j$.

<u>Fall α:</u> $v \notin \{w_1, \ldots, w_s\}$. Dann ist $w_1, \ldots, w_s \in B$,
also $a_1 = \ldots = a_s = 0$.

<u>Fall β:</u> $v \in \{w_1, \ldots, w_s\}$, ohne Einschränkung $v = w_1$.

- Wenn $a_1 = 0$, so $0 = w_2 a_2 + \ldots + w_s a_s$
und damit $a_1 = \ldots = a_s = 0$.
- Wenn $a_1 \neq 0$, dann $v = (w_2 a_2 + \ldots + w_s a_s) a_1^{-1}$,
aber $v \notin \langle B \rangle$ ↯.

Also gilt in jedem Fall $a_1 = \ldots = a_s = 0$,
und damit $B \cup \{v\}$ linear unabhängig.⌋

Dann haben wir aber $T \subseteq B \subsetneq B \cup \{v\} \subseteq T \cup E$,
ein Widerspruch zur Maximalität von B.
Also gibt es kein $v \in E - \langle B \rangle$, also $\langle B \rangle = V$. $\square$ (Beh. 2)

$\square$ (Ergänzungslemma mit $S = B - T$)

<u>Korollar:</u> Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Beweis: Wende das Ergänzungslemma an auf $T = \emptyset$ und $E = V$.

$\square$

$\boxed{6.}$ <u>Definition:</u> Ein K-Vektorraum V hat <u>endliche Dimension</u>, wenn er (mindestens) eine endliche Basis hat.

<u>Lemma:</u> Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis B. Für jede linear unabhängige Menge $T \subseteq V$ gilt dann $\# T \leq \# B$.

<u>Beweis:</u> • Wir betrachten zuerst den Fall, dass <u>T endlich</u> ist.
Sei $k = \# T$ und $m = \# B$.
Wir beweisen mit Induktion nach k:
[Es gibt l Elemente $w_1, \ldots, w_l \in B$ so, dass $T \cup \{w_1, \ldots, w_l\}$ eine Basis ist und $l \leq m-k$.

$\ulcorner$ $k=0$: Dann ist $T = \emptyset$, die Behauptung folgt aus dem Ergänzungslemma §3.5, angewandt auf $T=\emptyset$, $E=B$, $l=m$.

<u>Induktionsschritt</u>: Sei $T = \{t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}\}$ und $\# T = k+1$.
Die Behauptung gelte für k. Also gibt es $w_1, \ldots, w_l \in B$ so, dass $l \leq m-k$ und $E = \{t_1, \ldots, t_k, w_1, \ldots, w_l\}$ Basis ist.
Nach dem Ergänzungslemma §3.5 gibt es eine Basis B' mit $\{t_1, \ldots, t_{k+1}\} \subseteq B' \subseteq \{t_1, \ldots, t_{k+1}, w_1, \ldots, w_l\}$.
Da $t_{k+1} \in \langle E \rangle = \langle \{t_1, \ldots, t_k, w_1, \ldots, w_l\} \rangle$,
ist $\{t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, w_1, \ldots, w_l\}$ linear abh.,
also $B' \neq \{t_1, \ldots, t_{k+1}, w_1, \ldots, w_l\}$,
also $\# B' \leq k+1+l-1 = k+l \leq k+m-k = m$,
also $k+1 \leq \# B' \leq m$. $\lrcorner$

Damit ist für alle <u>endlichen</u> linear unabhängigen Mengen $T \subseteq V$ gezeigt, dass $\# T \leq \# B$.

• Wäre aber $T \subseteq V$ eine <u>unendlich</u> linear unabhängige Menge, so hätte T eine Teilmenge $T_0 \subseteq T$ mit $\# T_0 > \# B$ (weil T unendlich ist) und T_0 wäre linear unabhängig (weil T linear unabhängig ist). Das kann nicht sein nach den vorigen Überlegungen. $\square$