Vorlesung Lineare Algebra 1 vom 6. Dezember 2013

Wdh.: K-Vektorraum, Untervektorräume,

Für $X \subseteq V$ ist $\langle X \rangle = \bigcap \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum und } X \subseteq U \}$

$$= \{ x_0 a_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s \mid s \in \mathbb{N}, \; x_0, \ldots, x_s \in X \cup \{0\}, a_0, \ldots, a_s \in K \}$$

$\boxed{8.}$ **Definition:** Es seien V, W zwei K-Vektorräume.

Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x, y \in V$, $a \in K$:

(i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ← φ ist Homomorphismus der abelschen Gruppen V, W

(ii) $\varphi(xa) = \varphi(x) a$ ← zusätzliche Bedingung

Lemma: Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann sind

$$\ker(\varphi) = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \} \subseteq V$$

$$\varphi(V) = \{ \varphi(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

Untervektorräume.

Beweis: Wir wissen schon aus §1.17, dass $\ker(\varphi)$ und $\varphi(V)$ Untergruppen von V bzw. W sind.

Ist $a \in K$, $v \in \ker(\varphi)$, so gilt

$\varphi(va) = \varphi(v) a = 0a = 0$, also $va \in \ker(\varphi)$.

Ist $v \in V$, $a \in K$, so ist $\varphi(v) \cdot a = \varphi(va) \in \varphi(V)$, also $\varphi(v) \cdot a \in \varphi(V)$ und $\varphi(V)$ ist ein Unterraum. □

Beispiel: (a) $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $m \in \mathbb{R}$.

Setze $\varphi_m : V \to \mathbb{R}$, $\varphi_m(x, y) = y - mx$.

Es gilt $\varphi_m((x,y) + (x',y')) = \varphi_m((x+x', y+y')) = y + y' - m(x + x')$

$\varphi_m(x,y) + \varphi_m(x',y') = y - mx + y' - mx'$ "

$$\varphi_m(x,y)a = ya - mxa = \varphi(xa, ya) = \varphi((x,y)\cdot a)$$

φ_m nicht injektiv, da $\ker\varphi_m \neq \{0\}$

$\Rightarrow \varphi_m$ ist eine lineare Abbildung.

$\ker(\varphi_m) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\} = G_{m,0}$.

Das ist kein Zufall – wir werden sehen, dass jeder Unterraum eines Vektorraums ein Kern einer geeigneten linearen Abbildung ist.

(b) $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi_m} \mathbb{R}^2$, $\psi_m(x) = (x, mx)$ ebenfalls linear

$$\psi_m(\mathbb{R}) = G_{m,0}$$

$\boxed{9.}$ Satz: Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv, (ii) $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Beweis: Das folgt direkt aus §1.18, denn eine lineare Abbildung ist insbesondere ein Gruppenhomomorphismus. $\square$

Bemerkung: Ist $\varphi: V \to W$ linear und bijektiv, mit Umkehrabbildung $\psi: W \to V$ (also $\varphi \circ \psi = id_W$ und $\psi \circ \varphi = id_V$), so ist auch ψ linear.

Man nennt φ dann einen linearen Isomorphismus und schreibt $W \cong V$.

Beweis: Sei $w, w' \in W$ und $a \in K$. Zu zeigen ist

$$\psi(w + w') = \psi(w) + \psi(w') \quad \text{und} \quad \psi(wa) = \psi(w)a.$$

Da φ surjektiv ist, gibt es $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = w$, $\varphi(v') = w'$ und $w + w' = \varphi(v + v')$.

Also $\psi(w+w') = \psi \circ \varphi(v + v') = v + v' = \psi \circ \varphi(v) + \psi \circ \varphi(v')$

$$= \psi(w) + \psi(w')$$

und $\psi(wa) = \psi(\varphi(va)) = v\cdot a = \psi \circ \varphi(v)a = \psi(w)a$. $\square$

$\boxed{10.}$ Beispiel: Betrachten $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, schreiben die Elemente als $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ (unendliche Folge reeller Zahlen).

Definiere lineare Abbildung $\rho, \lambda : V \to V$ durch

$$\rho(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{(Shift nach rechts)}$$
$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{(Shift nach links).}$$

Es ist leicht zu sehen, dass ρ und λ linear sind.

Es gilt $\lambda \circ \rho = \mathrm{id}_V$, also ist ρ injektiv und λ ist surjektiv.

Aber: $\rho \circ \lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$,

also gilt $\rho \circ \lambda \neq \mathrm{id}_V$ und $\rho \circ \lambda$ ist weder surjektiv noch injektiv.

$\boxed{11.}$ Nebenklassen und Quotienten in Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Nach §1.16 ist die Menge der Nebenklassen $V/U = \{ \underbrace{v + U}_{=\{v+u \mid u \in U\}} \mid v \in V \}$ eine abelsche Gruppe, mit der Verknüpfung

$$(v + U) + (v' + U) = (v + v') + U.$$

Man nennt V/U den Quotienten(raum) von V modulo U.

Bem.: $u \in U \Rightarrow (v+u) + U = v + U$ für jedes $v \in V$,

da $(v+u) - v = u \in U$, vgl. Lemma in §1.15,

bzw. da $\{v + u + k \mid k \in U\} = \{v + l \mid l \in U\}$

[„$\subseteq$" ✓, „$\supseteq$": nimm $k := l - u \in U$]

Satz: Ist V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist V/U ein K-Vektorraum mit Skalarmultiplikation

$$(v + U) \cdot a = va + U.$$

__Beweis:__ Wir müssen zuerst zeigen, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Angenommen, $v+U=v'+U$.
Dann gilt nach § 1.15 (Lemma) $v-v'\in U$,
also auch $va-v'a\in U$, also $va+U=v'a+U$.
Die Eigenschaften (i)–(iv) sind jetzt einfach:

(i) $((v+U)+(w+U))a = (v+w+U)a = va+wa+U$
$\qquad = (va+U)+(wa+U) = (v+U)\cdot a + (w+U)\cdot a$

(ii) $(v+U)(a+b) = v(a+b)+U = va+vb+U$
$\qquad = (va+U)+(vb+U)$

(iii) $(v+U)(a\cdot b) = v(ab)+U = (va)\cdot b+U$
$\qquad = (va+U)\cdot b = ((v+U)\cdot a)\cdot b$

(iv) $(v+U)\cdot 1 = v\cdot 1+U = v+U$ $\square$

$\boxed{12.}$ __Definition:__ Sei V ein K-Vektorraum und $U\subseteq V$ ein Unterraum.
Wir definieren eine Abbildung $\pi: V\to V/U$ durch
$$\pi(v)=v+U.$$

__Satz:__ Die so definierte Abbildung ist linear und surjektiv.
Man nennt π die kanonische Quotientenabbildung
$\pi: V\to V/U$. __Es gilt $\pi^{-1}(v+U)\overset{!}{=}v+U$ für alle $v\in V$.__

__Beweis:__ Das ist klar:
$$\pi(v+w) = v+w+U = v+U+w+U = \pi(v)+\pi(w)$$
$$\pi(va) = va+U = (v+U)a = \pi(v)a.$$
Also ist π linear.
Bew. von $\overset{!}{=}$:
$\pi(w)=w+U=v+U \Leftrightarrow w-v\in U \Leftrightarrow w\in v+U$,
also gilt „$\subseteq$" in der Beh. "$\overset{!}{=}$", entsprechend „$\supseteq$". $\square$

__Bsp.:__ $V=\mathbb{R}^2$, $U:=\langle(1,1)\rangle = \{(z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$
Dann ist $V/U=\{(x,y)+U \mid x,y\in\mathbb{R}\}$.