Lineare Algebra 1, Vorlesung vom 3. Dezember 2013

Wdh.: • V K-Vektorraum: $(V,+)$ abelsche Gruppe, $(K,+,\cdot)$ Körper,
$V \times K \to V$, $(v,a) \mapsto va$ "Skalarmultiplikation"
(i) $(v+w)a = va + wa$, (ii) $v(a+b) = va + vb$,
(iii) $v(ab) = (va)\cdot b$, (iv) $v \cdot 1 = v$

• einfache Beispiele, alle Spezialfälle von: sind V_j alle K-VRe, $j \in J$ so ist auch $\prod_{j \in J} V_j$ ein K-VR

• $W \subseteq V$ heißt Untervektorraum, falls $(W,+)$ eine Untergruppe ist mit $\forall w \in W\ \forall a \in K: wa \in W$

$\boxed{4.}$ Weitere Beispiele

Vorab eine Schreibweise. Sind A, B Mengen, so bezeichne B^A die Menge aller Abbildungen von A nach B,

$$B^A = \{ f : A \to B \}.$$

Ist K ein Körper und X eine nichtleere Menge, dann ist

$$K^X = \{ f : X \to K \} \text{ ein } K\text{-Vektorraum,}$$

wenn wir folgenden Verknüpfungen benutzen:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{für } x \in X \text{ und } f,g \in K^X,$$
$$(f\cdot a)(x) = f(x)\cdot a \quad \text{für } a \in K,\ x \in X,\ f \in K^X.$$

• Ist $X = \mathbb{N}$, so erhalten wir wieder mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid x_j \in \mathbb{R} \}$ den Raum aller reellen Folgen.

• Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge (z.B. ein Intervall), so ist $\mathbb{R}^X$ der Raum aller reellen Abbildungen $f: X \to \mathbb{R}$, der in der Analysis wichtig ist.

- Ist $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen Folgen,
  $K = \{ (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V \mid \lim_{j\in\mathbb{N}} v_j \text{ existiert} \}$

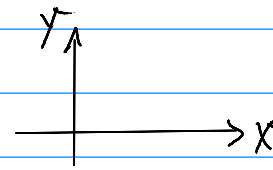
  der Raum aller konvergenten Folgen und

  $N = \{ (v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in K \mid \lim_{j\in\mathbb{N}} v_j = 0 \}$

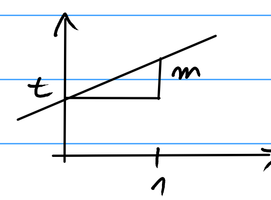
  der Raum aller Nullfolgen, dann sind $N \subseteq K \subseteq V$ ($\mathbb{R}$-) Unterräume. (Was muss man dazu noch wissen?)

$\boxed{5.}$ Noch mehr Beispiele

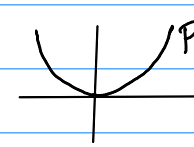
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$
die "Tafelebene" und Teilmengen darin:



Die "Koordinatenachsen" $X = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$
und $Y = \{ (0,y) \mid y \in \mathbb{R} \}$
sind offensichtlich Untervektorräume.



Was ist mit Geraden der Form "$y = mx+t$"?
Genauer: $G_{m,t} = \{ (x, mx+t) \mid x \in \mathbb{R} \}$.
Betr. $(x, mx+t)\cdot a = (xa, mxa + ta)$.
Für $a \neq 1$ liegt dieser Punkt genau dann in $G_{m,t}$, wenn $t = 0$.
$[\, ta = t \Leftrightarrow t(a-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \lor a = 1 \,]$
Also ist $G_{m,t}$ für $t \neq 0$ <u>kein</u> Untervektorraum (aber für $t=0$ ist es einer). Es gilt $G_{0,0} = X$, setze $G_{\infty,0} = Y$.
Tatsächlich ist $\{ G_{m,0} \mid m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \} \cup \{ \{ \underset{=(0,0)}{0} \} \} \cup \{ V \}$
die Menge <u>aller</u> Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^2$.
Im Moment können wir das noch nicht beweisen.
Andere Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind <u>keine</u> Untervektorräume,
z.B. die Parabel $P = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$. (Warum?)



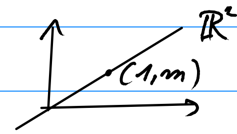
6. <u>Lemma:</u> Sei V ein K-Vektorraum und sei $\mathfrak{U}$ eine nichtleere Menge von Untervektorräumen von V.
Dann ist auch
$$\bigcap \mathfrak{U} = \{ v \in V \mid \text{für alle } U \in \mathfrak{U} \text{ gilt } v \in U \}$$
ein Unterraum. Kurz: Durchschnitte von Unterräumen sind wieder Unterräume.

<u>Beweis:</u> Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ gilt $0 \in U$, also gilt $0 \in \bigcap \mathfrak{U}$.
Ist $v, w \in \bigcap \mathfrak{U}$, so gilt $v, w \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$,
also $\left\{ \begin{array}{l} v+w \in U \\ -v \in U \\ va \in U \end{array} \right\}$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ und alle $a \in K$,
also auch $v+w, -v, va \in \bigcap \mathfrak{U}$ für alle $a \in K$. $\square$

Achtung! Die Vereinigung von Unterräumen ist i.A. <u>kein</u> Unterraum, z.B. in §2.5 ist $X \cup Y$ <u>kein</u> Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$! (Warum?)

7. <u>Definition:</u> Sei V ein K-Vektorraum, sei $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Es sei
$$\mathfrak{U} = \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum und } X \subseteq U \}.$$
Wegen $V \in \mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{U} \neq \emptyset$.
Man nennt den Unterraum $\langle X \rangle = \bigcap \mathfrak{U}$ das <u>Erzeugnis</u> von X.
Wenn $W = \langle X \rangle$ gilt, so heißt X <u>Erzeugendensystem</u> von W.

<u>Bsp.:</u> $\langle V \rangle = V$, $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ (Warum?)



<u>Satz:</u> Sei V ein K-Vektorraum, sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge.
Dann besteht $W = \langle X \rangle$ aus allen endlichen Summen der Form $x_0 a_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s$ mit $s \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_s \in X \cup \{0\}$, $a_0, \ldots, a_s \in K$.

Beweis: Sei $U = \{x_0 a_0 + \ldots + x_s a_s \mid s \in \mathbb{N},\ x_0, \ldots, x_s \in X \cup \{0\},$
$a_0, \ldots, a_s \in K\}$.

Zu zeigen ist $U = \langle X \rangle$. Offensichtlich gilt

(i) $X \subseteq U$ [✓]

(ii) Ist $H \subseteq V$ ein Unterraum mit $X \subseteq H$,
so gilt $U \subseteq H$ (Klar?)

(iii) U ist Unterraum, denn: $0 \in U$,
und sind $x_0 a_0 + \ldots + x_s a_s \in U$
und $x_0' a_0' + \ldots + x_r' a_r' \in U$,
so folgt $x_0 a_0 + \ldots + x_s a_s + x_0' a_0' + \ldots + x_r' a_r' \in U$,
$-(x_0 a_0 + \ldots + x_s a_s) = x_0(-a_0) + \ldots + x_s(-a_s) \in U$,
und $(x_0 a_0 + \ldots + x_s a_s) \cdot a = x_0(a_0 a) + \ldots + x_s(a_s a) \in U$.

Es folgt $\langle X \rangle = U$.
⌜Denn: in (ii) betr. $H = \langle X \rangle$, dann ist $U \subseteq \langle X \rangle$.
Weiter $X \subseteq U$ wegen (i), es folgt $\langle X \rangle \subseteq U \subseteq \langle X \rangle$,
also Gleichheit. ⌟ □

$\boxed{8}$ **Definition:** Es seien V, W zwei K-Vektorräume.
Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt <u>lineare Abbildung</u>,
wenn für alle $x, y \in V$, $a \in K$ gilt:

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(xa) = \varphi(x)a$

Die Bedingung (i) sagt, dass φ ein Homomorphismus der abelschen Gruppen V, W ist. Die Bedingung (ii) ist eine zusätzliche Bedingung.

[Bem.: $\varphi(x \cdot 2) = \varphi(x+x) \overset{(i)}{=} \varphi(x) + \varphi(x) = \varphi(x) \cdot 2$]

Lemma: Es sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildungen von K-Vektorräumen. Dann sind

$$\ker(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(0) = 0\} \subseteq V$$

und

$$\varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

Unterräume.

Beweis: Wir wissen schon aus §1.17, dass $\ker(\varphi)$ bzw. $\varphi(V)$ Untergruppen von V bzw. W sind.

Ist $a \in K$, $v \in \ker(\varphi)$, so

$$\varphi(va) = \varphi(v)a = 0 \cdot a = 0, \quad \text{also } va \in \ker(\varphi).$$

Also ist $\ker(\varphi)$ ein Unterraum.

Ist $v \in V$, $a \in K$, so ist $\varphi(v)a = \varphi(va)$,

also $\varphi(v)a \in \varphi(V)$ und $\varphi(V)$ ist ein Unterraum. $\square$