Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese SS 14

7. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 26.05.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 7.1

Gegeben sei der Polynomring $K[T]$ und $Y \in K[T]^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Matrizen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_r \in K^{n\times n}$ gibt mit

$$Y = Y_0 + Y_1 \cdot T + Y_2 \cdot T^2 + \ldots Y_r \cdot T^r.$$

Aufgabe 7.2

Der folgende "Beweis" des Satzes von Cayley-Hamilton ist falsch: Gegeben sei $X \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\mathcal{X}_X(X) = \det(\mathbb{1}_n \cdot X - X) = \det(X - X) = 0.$$

Begründen Sie, wieso diese Argumentation falsch ist.

Aufgabe 7.3

Gegeben sei eine nilpotente Matrix $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K - \{0\}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbb{1}_n \cdot \lambda + A$$

invertierbar ist.

Hinweis: geometrische Reihe.

Aufgabe 7.4

Gegeben sei ein Körper K und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Wenn A invertierbar ist, dann existiert $p \in K[T]$, so dass gilt:

$$p(A) = A^{-1}.$$

Hinweis: Skript: §5.6.