Prof. Dr. L. Kramer
Dipl.-Math. O. Varghese

SS 14

5. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra II

(**Abgabe:** bis Montag 12.05.2014, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 5.1

Sei $C^\infty(0,1)$ der $\mathbb{R}$-Vektoraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$D : C^\infty(0,1) \to C^\infty(0,1)$$

mit

$$f \mapsto f'$$

für $f \in C^\infty(0,1)$.

i) Bestimmen Sie den Kern von D.

ii) Zeigen Sie, dass D surjektiv ist.
Hinweis: Analysis I, Satz 17.4 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).

Aufgabe 5.2

Sei K ein Körper und $K[T]$ der Polynomring. Seien weiter $f, g \in K[T]$.

i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{grad}(f \cdot g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$$

ii) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $K[T]$.

Aufgabe 5.3

Seien R, S kommutative Ringe und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Weiter sei

$$\iota : R \to R[T]$$

mit

$$r \mapsto r$$

für $r \in R$ die Einbettung. Sei weiter $b \in S$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\overline{f}_b : R[T] \to S$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

i) $\overline{f}_b(T) = b$

ii) $\overline{f}_b \circ \iota = f$.

Aufgabe 5.4

Sei K ein Körper. Berechnen Sie

$$Z := \{A \in K^{n\times n} \mid AB = BA \text{ für alle } B \in K^{n\times n}\}$$

Hinweis: Für eine Matrix $A \in Z$ gilt: $AE_{r,s} = E_{r,s}A$, wobei $E_{r,s} = (\epsilon_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert ist durch:

$$\epsilon_{i,j} = 1 \text{ für } i = r, j = s \text{ und } \epsilon_{i,j} = 0 \text{ sonst.}$$