

9. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 20.12.2013, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: K -Vektorräume, Erzeugnis von X , lineare Abbildungen, Kern und Bild einer linearen Abbildung, Homomorphiesatz für Vektorräume.

Aufgabe 9.1

- i) Zeigen Sie, dass gilt: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.
- ii) Sei $V = K$ als K -Vektorraum und sei $v \in V - \{0\}$ beliebig. Zeigen Sie, dass gilt: $\langle \{v\} \rangle = V$.

Aufgabe 9.2

Seien V und W Vektorräume über K und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- i) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum ist.
- ii) Sei $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass gilt: $f(\langle M \rangle) = \langle f(M) \rangle$.

Aufgabe 9.3

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(2) = (6, 2)$. Bestimmen Sie den Kern und das Bild von f .

Aufgabe 9.4

Sei $V = K^3$ als K -Vektorraum und $U \subseteq V$ wie in Aufgabe 8.1iv) definiert, also:

$$U := \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $V/U \cong K$.