

7. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 6.12.2013, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: Komplexe Zahlen, Gruppen, Untergruppen, symmetrische Gruppe, Aufgabe 5.3, Homomorphismen, Mono-, Epi-, und Isomorphismen, gleichmächtige Mengen, Charakterisierung von injektiven Homomorphismen, Quotient von Gruppe modulo Untergruppe.

Aufgabe 7.1

Zeigen Sie, dass

$$S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{C} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 7.2

Seien G, H, K Gruppen und $f : G \rightarrow H, g : H \rightarrow K$ Homomorphismen. Zeigen Sie:

- i) Die Komposition $g \circ f : G \rightarrow K$ ist ein Homomorphismus.
- ii) Ist $f : G \rightarrow H$ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung $g : H \rightarrow G$ von f ein Isomorphismus.

Aufgabe 7.3

Seien M, N zwei gleichmächtige Mengen. Zeigen Sie, dass die symmetrischen Gruppen $\text{Sym}(M)$ und $\text{Sym}(N)$ isomorph sind.

Aufgabe 7.4

Seien G, H abelsche Gruppen. Sei weiter $f : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Nach §1.17 ist $K := \ker(f) \subseteq G$ eine Untergruppe. Weiter ist nach §1.16 G/K eine Gruppe. Zeigen Sie:

- i) Die Abbildung $\pi : G \rightarrow G/K$ mit $g \mapsto gK$ für $g \in G$ ist ein Homomorphismus.
- ii) Es existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\bar{f} : G/K \rightarrow H$, so dass gilt: $f = \bar{f} \circ \pi$.
- iii) Der Homomorphismus $\bar{f}$ ist ein Monomorphismus.
- iv) Falls f ein Epimorphismus ist, dann ist $\bar{f}$ ein Isomorphismus.