

4. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 15.11.2013, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Multiple choice (Präsenzaufgabe)

Seien A, B nichtleere Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Welche Aussagen sind wahr, welche falsch?

1. Ist $B \subsetneq A$, dann kann f nicht bijektiv sein.
☐ wahr
☐ falsch
2. Wenn f injektiv ist, dann ist die Abbildung $\bar{f} : A \rightarrow f(A)$ definiert durch $\bar{f}(a) := f(a)$ für $a \in A$ bijektiv.
☐ wahr
☐ falsch
3. Sind A und B endliche Mengen mit $\#A = \#B$ und f injektiv, dann ist f auch bijektiv.
☐ wahr
☐ falsch
4. Ist $A = B$ und f injektiv, dann ist f auch bijektiv.
☐ wahr
☐ falsch

Aufgabe 4.1

Seien A, B und C beliebige Mengen.

- i) Seien $f : B \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen und sei $h : A \rightarrow B$ eine surjektive Abbildung. Beweisen Sie:

$$f \circ h = g \circ h \Rightarrow f = g$$

- ii) Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : A \rightarrow B$ Abbildungen und sei $h : B \rightarrow C$ eine injektive Abbildung. Beweisen Sie:

$$h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g$$

Aufgabe 4.2

Seien A, B endliche Mengen mit $\#A = r$ und $\#B = s$ für $r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sei weiter

$$\mathcal{F} := \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ Abbildung}\}$$

die Menge aller Abbildungen mit Definitionsbereich A und Wertebereich B .

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach r , dass die Kardinalität von $\mathcal{F}$ gleich s^r ist.

Aufgabe 4.3

Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Die Gruppe $\text{Sym}(X)$ heißt abelsch, wenn für alle Elemente $f, g \in \text{Sym}(X)$ gilt: $f \circ g = g \circ f$.

Beschreiben Sie alle Mengen X , für welche die zugehörige symmetrische Gruppe $\text{Sym}(X)$ abelsch ist (mit Begründung).

Aufgabe 4.4

- i) Beweisen Sie, dass eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist.
- ii) Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Lösung einer Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

ist. Wir bezeichnen die Menge der algebraischen Zahlen mit $\mathcal{A}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist.
- (b) Beweisen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass jede Gleichung der Form wie oben endlich viele Lösungen hat.)
- (c) Begründen Sie, dass $\mathcal{A} \subsetneq \mathbb{R}$ gilt.