

2. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Donnerstag 31.10.2013, 10:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 2.1

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt:

- i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass die umgekehrte Inklusion in ii) im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2.2

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Beweisen Sie:

- i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
- ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Gelten in i) und ii) auch die umgekehrten Implikationen?

Zeigen Sie mit jeweils einem Beispiel, dass aus der Bijektivität von $g \circ f$ nicht notwendig die Bijektivität von f oder g folgt.

Aufgabe 2.3

Seien X und Y Mengen, und seien $A, C \subseteq X$ und $B, D \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie:

- i) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- ii) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass die umgekehrte Inklusion in ii) im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2.4

Sei M eine Menge und sei $\{0, 1\}^M$ die Menge aller Abbildungen mit dem Definitionsbereich M und dem Wertebereich $\{0, 1\}$. Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Abbildungen

$$\Phi : \mathcal{P}(M) \rightarrow \{0, 1\}^M$$

und

$$\Psi : \{0, 1\}^M \rightarrow \mathcal{P}(M)$$

zueinander inverse Bijektionen definieren (d.h., dass $\Psi \circ \Phi = id$ und $\Phi \circ \Psi = id$ gelten):

$$\Phi(A)(m) := \begin{cases} 1, & \text{falls } m \in A \\ 0, & \text{falls } m \notin A \end{cases}$$

$$\Psi(f) := \{m \in M \mid f(m) = 1\}.$$