

13. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I (keine Abgabe)

Stichworte zur Vorbereitung: Symmetrische Gruppe, $GL(V)$, Gruppenhomomorphismen, lineare Abbildungen, Begleitmatrizen, Ergänzungslemma.

Aufgabe 13.1

Sei $\text{Sym}(\{1, \dots, n\})$ die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, \dots, n\}$, und sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Für ein $\sigma \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\})$ sei $\phi_\sigma \in GL(V)$ der durch $\phi_\sigma(v_i) := v_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmte Endomorphismus von V . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \text{Sym}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow GL(V)$$

definiert durch

$$\Phi(\sigma) := \phi_\sigma$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.2

Seien

$$B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und

$$C = \{(1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

Teilmengen.

- Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und C eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.
- Berechnen Sie die Begleitmatrix ${}_C M_B(\phi)$ der linearen Abbildung ϕ bezüglich der Basen B und C , wobei $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ mit

$$\phi(x, y, z) := (x + z, 2x + 2y + z, x + y + z, y + z, x)$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Definition: Gegeben sei ein K -Vektorraum V mit Untervektorräumen W_1 und W_2 . Dann heisst

$$W_1 + W_2 := \{v \in V \mid \text{es gibt } v_i \in W_i \text{ mit } v = v_1 + v_2\}$$

die Summe von W_1 und W_2 .

Aufgabe 13.3

Sei V ein K -Vektorraum und W_1 und W_2 Unterräume. Zeigen Sie:

- Die Summe $W_1 + W_2 \subseteq V$ ist ein Unterraum.
- Wenn V ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, dann gilt:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

-Bitte wenden-

Aufgabe 13.4

Sei V ein 15-dimensionaler Vektorraum, $W_1 \subseteq V$ ein 7-dimensionaler und $W_2 \subseteq V$ ein 11-dimensionaler Unterraum.

- i) Zeigen Sie, dass gilt: $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 2$.
- ii) Konstruieren Sie W_1 und W_2 wie oben mit $\dim(W_1 \cap W_2) = 6$.