Prof. Dr. L. Kramer
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 13/14

12. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 24.01.2014, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: Produkte von Vektorräumen, Dimension eines Vektorraums, Dimensionsformel, Homomorphiessatz für Vektorräume, Aufgabe 10.4*i*).

Aufgabe 12.1

i) Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie: $\dim(V) = 0$ genau dann, wenn $V \cong \{0\}$.
ii) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V unendlich dimensional ist.

Aufgabe 12.2

Seien

$$U := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\right\},$$
$$V := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_4 = 0\right\}$$

Teilmengen von $\mathbb{R}^4$.

i) Zeigen Sie, dass U und V Unterräume von $\mathbb{R}^4$ sind. Argumentieren Sie mit Hilfe von linearen Abbildungen.
ii) Bestimmen Sie die Dimensionen von U, V und $U \cap V$ und geben Sie jeweils eine Basis für diese Unterräume an.

Aufgabe 12.3

Seien U, V endlich dimensionale Vektorräume. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V).$$

Aufgabe 12.4

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Wir definieren

$$h(V) := \sup\left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ es gibt eine Kette } U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_{n-1} \subsetneq U_n \text{ mit } U_i \subseteq V \text{ Unterraum}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $h(V) = \dim(V)$.