Prof. Dr. L. Kramer
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 13/14

11. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 17.01.2014, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: (endliche) Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit, Basis.

Aufgabe 11.1

Sei V ein K-Vektorraum.

i) Zeigen Sie: Wenn gilt $0 \in X \subseteq V$, dann ist X linear abhängig.

ii) Seien X, $Y \subseteq V$ linear unabhängige Teilmengen. Ist die Teilmenge $X \cup Y$ stets linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11.2

i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig:

$$(1, 3, 4),\ (3, t, 11),\ (-1, -4, 0)$$

ii) Stellen Sie den Vektor w jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

a) $w = (6, 2, 1),\ v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (7, 3, 1),\ v_3 = (2, 5, 8)$

b) $w = (2, 1, 1),\ v_1 = (1, 5, 1),\ v_2 = (0, 9, 1),\ v_3 = (3, -3, 1)$

Aufgabe 11.3

Finden Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ vier Vektoren, so dass je drei dieser Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Begründen Sie Ihre Lösung.

Definition: *Sei V ein K-Vektorraum. Der Vektorraum V heißt endlich erzeugt, falls eine endliche Teilmenge $X \subseteq V$ existiert, so dass gilt: $V = \langle X \rangle$.*

Aufgabe 11.4

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Zeigen Sie, dass jedes Erzeugendensystem von V ein endliches Erzeugendensystem von V enthält.