

10. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 10.01.2014, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: K -Vektorräume, Unterräume, lineare Abbildungen, Räume von linearen Abbildungen, $L(V, W)$, lineare Gleichungssysteme, Basis eines Vektorraums, das Ergänzungslemma.

Aufgabe 10.1

Sei W ein K -Vektorraum und X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass die Menge W^X aller Abbildungen $f : X \rightarrow W$ ein K -Vektorraum ist, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fa)(x) &= f(x)a\end{aligned}$$

für $f, g \in W^X, a \in K, x \in X$.

Aufgabe 10.2

Es seien V, W und X Vektorräume über K und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

i) Die Abbildung

$$\Phi : L(W, X) \rightarrow L(V, X)$$

definiert durch

$$g \mapsto g \circ f$$

für $g \in L(W, X)$ ist eine lineare Abbildung.

- ii) a) Ist f ein Epimorphismus, dann ist Φ ein Monomorphismus.
b) Ist f ein Monomorphismus, dann ist Φ ein Epimorphismus.

Aufgabe 10.3

Sei $\lambda \in \mathbb{Z}/5$ und

$$f_\lambda : (\mathbb{Z}/5)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/5)^2$$

definiert durch

$$(x, y) \mapsto (x + y \cdot \bar{2}, x \cdot \bar{4} + y \cdot \lambda)$$

eine lineare Abbildung. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $f_\lambda(x, y) = (\bar{4}, \bar{4})$ und geben Sie die Lösungsmengen für alle Werte von $\lambda \in \mathbb{Z}/5$ an.

Aufgabe 10.4

i) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$B := \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} \subseteq K^n$$

eine Basis von K^n als K -Vektorraum ist.

ii) Bestimmen Sie alle Vektorräume, welche genau eine Basis besitzen.

-Bitte wenden-

Sternchenaufgabe:

Ist die Fläche des Vierecks im regelmäßigen fünfzackigen Stern, welches von den Strecken AB, BC, CD, AD eingeschlossen wird, größer, kleiner oder gleich der halben Sternfläche? Begründen Sie Ihre Behauptung.

