§7. Zorns Lemma

1. Partielle Ordnungen

Sei P eine (nicht leere) Menge. Eine <u>partielle Ordnung</u> ist eine zweistellige Relation $\leq$ auf P mit folgenden Eigenschaften, für alle $x, y, z \in P$

(i) $x \leq x$ (reflexiv)

(ii) $x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiv)

(iii) $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymmetrisch)

Schreibe $x < y$ für $x \leq y$, $x \neq y$

<u>Beispiel</u> X Menge, $P = \mathfrak{P}(X)$ Potenzmenge

$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ist partielle Ordnung.

<u>Klar</u>: Ist $S \subseteq P$, dann ist $\leq$ auf S ebenfalls eine partielle Ordnung. <u>Sei ab jetzt $(P, \leq)$ partiell geordnet.</u>

Eine <u>Kette</u> $C \subseteq P$ ist eine (nicht leere) Teilmenge, in der für alle $x, y \in C$ gilt:

$x \leq y$ oder $y \leq x$, alle Elemente von C sind vergleichbar.

nichtleere Teilmengen von Ketten sind wieder Ketten

Ein Element $x \in P$ heißt <u>maximal</u> (<u>minimal</u>) wenn es kein $y \in P$ gibt mit $x < y$ (bzw $y < x$)

Sei $C \subseteq P$ eine Kette. Ein Element $s \in P$ heißt <u>obere Schranke</u> von C, wenn für alle

$x \in G$ gilt $x \le S$ (wir verlangen hier nicht $s \in G$).

2. <u>Zorns Lemma</u> Sei $(P, \le)$ eine partiell geordnete Menge. Wenn jede Kette $G \subseteq P$ eine obere Schranke hat, dann gibt es in P ein maximales Element.

Naive Beweisidee: Angenommen, es gibt kein maximales Element in P. Dann gibt es zu jedem $x \in P$ ein $y \in P$ mit $x < y$. "Iteriere" das und erhalte eine Kette ohne obere Schranke, ein Widerspruch.
Das müssen wir formalisieren.

3. <u>Def</u> Eine Kette $G \subseteq P$ heißt <u>wohlgeordnet</u>, wenn für jede nicht leere Teilmenge $Y \subseteq G$ gilt: es gibt $y_0 \in Y$ so, dass für alle $y \in Y$ gilt $y_0 \le Y$, d.h. y_0 ist minimal in Y.

Beispiel: $(\mathbb{N}, \le)$ ist wohlgeordnet

<u>Lemma</u> (1) Sei $G \subseteq P$ wohlgeordnete Kette, sei $s \in P$ eine obere Schranke für G. Dann ist auch $G \cup \{s\}$ wohlgeordnet

<u>Beweis</u> Sei $\emptyset \neq Y \subseteq G \cup \{s\}$. Wenn $Y = \{c\}$ setze $y_0 = c$, wenn $Y \neq \{c\}$ wähle y_0 minimal in $Y \cap G$. $\square$

4. <u>Definition</u> Sei $C \subseteq P$ eine Kette. Eine (nichtleere) Teilmenge $B \subseteq C$ heißt <u>Anfangsstück</u> von C wenn für alle $b \in B$ gilt, dass $\{c \in C \mid c \leq b\} \subseteq B$.

<u>Lemma</u> Sei M eine Menge von wohlgeordneten Ketten in P. Angenommen, es gilt für alle $C, \tilde{C} \in M$, dass entweder C Anfangsstück von $\tilde{C}$ ist oder $\tilde{C}$ Anfangsstück von C. Dann ist $S = \bigcup M = \{x \in P \mid x \in C \text{ für ein } C \in M\}$ eine wohlgeordnete Kette.

<u>Beweis</u> Sei $x, y \in S$, $x \in C \in M$, $y \in \tilde{C} \in M$.
Weil $C \subseteq \tilde{C}$ oder $\tilde{C} \subseteq C$ folgt $x, y \in C$ oder $x, y \in \tilde{C}$ $\Rightarrow$ $x \leq y$ oder $y \leq x$, d.h. S ist eine Kette.
Sei $\emptyset \neq Y \subseteq S$. Wähle $C \in M$ mit $C \cap Y \neq \emptyset$, sei $y_0 \in C \cap Y$ minimal in $C \cap Y$. Dann ist y_0 minimal in Y. Denn angenommen, $z \in Y$, $z \leq y_0$. Dann gibt es $\tilde{C} \in M$ mit $z \in \tilde{C}$.

C Anfangsstück von $\tilde{C}$ $\Rightarrow$ $z \in C$ $\Rightarrow$ $z = y_0$

$\tilde{C}$ Anfangsstück von C $\Rightarrow$ $z \in C$ $\Rightarrow$ $z = y_0$

$\square$

Zorns Lemma Sei $(P, \le)$ partiell geordnet.
Angenommen, jede Kette $C \subseteq P$ hat eine obere Schranke.
Dann gibt es in P ein maximales Element.

Beweis Angenommen, es gibt in P kein maximales Element. Zu jedem $x \in P$ gibt es dann $y \in P$ mit $x < y$.

Zu jeder Kette $C \subseteq P$ können wir dann eine obere Schranke $s(C) \in P$ wählen mit $s(C) \notin C$.
(Hier benutzen wir das Auswahlaxiom §0.18)

Wir wählen $p \in P$ und definieren M als Menge aller Ketten $C \subseteq P$ mit folgenden drei Eigenschaften

(i) C ist wohlgeordnet

(ii) p ist das kleinste Element in C

(iii) Ist $\emptyset \neq B \subseteq C$ Anfangsstück und $B \neq C$, so ist $s(B)$ das kleinste Element von $C - B$.

Dann gilt jedenfalls $\{p\} \in M$

Beh Für alle $C, \tilde{C} \in M$ gilt: C ist Anfangsstück von $\tilde{C}$ oder $\tilde{C}$ ist Anfangsstück von C.

Beweis Sei $N = \{ \tilde{\tilde{C}} \mid \tilde{\tilde{C}}$ Anfangsstück von C und $\tilde{C} \}$

Es folgt $\{p\} \in N$. Weiter ist $D = \bigcup N$ Anfangsstück in $\tilde{C}$ und C. Angenommen, $\tilde{C} \neq D \neq C$. Dann ist $s(D) \in \tilde{C}$ und $s(D) \in C$, aber $s(D) \notin D$ ↯ □

Nach Lemma §7.4 ist $S = \bigcup M$ eine wohlgeordnete Kette, mit p als kleinstem Element.

<u>Beh</u> S erfüllt auch (iii) oben. Sei $\emptyset \neq B \subsetneq S$ Anfangsstück, sei $u \in S - B$. Dann gilt $u \in \tilde{G}$ für ein $G \in M$, B ist echtes Anfangsstück von $\tilde{G}$, also $s(B) \in \tilde{G} \subseteq S$. Da $s(B)$ das kleinste Element in $\tilde{G} - B$ ist, ist es auch das kleinste Element in $S - B$, weil $\tilde{G}$ Anfangsstück in S ist.

Es folgt $S \in M$. Aber dann ist auch $S \cup \{s(S)\} \in M$, ein Widerspruch $\square$

denn $c(S) \notin S$