§5. Polynome und Normalform

Wir werden im Folgenden sehen, dass man aus dem charakteristischen Polynom einer linearen Abbildung oder Matrix wichtige Eigenschaften der Abbildung / Matrix ablesen kann. Dazu müssen wir zuerst Polynome genauer betrachten.

1. Der verschiedene Einsetzungshomomorphismus

Sei R ein kommutativer Ring, sei S ein (nicht unbedingt kommutativer) Ring, sei $\alpha: R \to S$ ein Ringhomomorphismus, d.h. es gilt

(i) $\alpha(1) = 1$

(ii) $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ für alle $x, y \in R$

(iii) $\alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ für alle $x, y \in R$

Sei weiter $\lambda \in S$ ein beliebiges Element mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in R$ gilt

(*) $\lambda \cdot \alpha(x) = \alpha(x) \cdot \lambda.$

Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$$\hat{\alpha} = ev_\lambda^\alpha : R[T] \to S$$

mit (i) $\hat{\alpha}(x) = \alpha(x)$ für alle $x \in R$

(ii) $\alpha(T) = \lambda$

Für $p \in R[T]$ schreibe $\hat{\alpha}(p) = p(\lambda)$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & S \\ & R[T] \arrow[ur, "\hat{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> (teilweise ÜA) Für $p = p_0 + p_1 T + \dots + p_m T^m \in R[T]$ definiere $p(\lambda) = \alpha(p_0) + \alpha(p_1)\lambda + \alpha(p_2)\lambda^2 + \dots + \alpha(p_m)\lambda^m \in S$

So, wie $+$ und $\circ$ auf $R[T]$ definiert sind, wird das ein Homomorphismus (ÜA). Zeige Eindeutigkeit: $\hat{\alpha}(T) = \lambda$ $\Rightarrow$ $\hat{\alpha}(T^k) = \lambda^k$, das legt $\hat{\alpha}$ eindeutig fest (ÜA) $\square$

Wir werden das Resultat immer wieder benutzen in folgender Situation: K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\alpha: K \to \mathrm{End}(V)$ $\alpha(a) = \mathrm{id}_V \cdot a$, $a \in K$ und $\hat{\alpha}(T) = \varphi$, also

$$p(\varphi) = p_0\, \mathrm{id}_V + p_1 \cdot \varphi + p_2 \varphi^2 \dots + p_m \varphi^m$$

m-fache Komposition von φ mit sich, $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{m}$

<u>und</u> für $X \in K^{n \times n}$

$$\alpha(a) = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n \cdot a \qquad \hat{\alpha}(T) = X$$

$$\leadsto p(X) = p_0 \cdot \mathbb{1}_n + p_1 \cdot X + p_2 X^2 + \dots + p_m X^m .$$

Unser nächstes Ziel ist der <u>Satz von Cayley-Hamilton</u>:

$$\chi_X(X) = 0$$

Dazu brauchen wir einen algebraischen Trick.

2. <u>Definition</u> Ein kommutativer Ring R heißt <u>Integritätsbereich</u>, wenn gilt:

(i) $1 \neq 0$ (also $R \neq \{0\}$, vgl. § 1.8)

(ii) Ist $x, y \in R$ mit $xy = 0$, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$

Die Eigenschaften sagen, dass $(R - \{0\}, \cdot)$ eine <u>kürzbare</u> Halbgruppe ist, vgl § 1.4. Denn dann gilt:

$ax = ay \Rightarrow a(x-y) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $x = y$.

<u>Beispiele</u> (a) jeder Körper ist ein Integritätsbereich.

(b) $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich

(c) $\mathbb{Z}/4$ ist <u>kein</u> Integritätsbereich: $\overline{2} \neq \overline{0}$, aber $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$

<u>Lemma</u> Sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt:

(i) $R[T]$ ist wieder ein Integritätsbereich

(ii) für alle $p, q \in R[T]$ gilt $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$

<u>Beweis</u> Zuerst (ii). $p = p_0 + \ldots + p_m T^m \quad p_m \neq 0$

$q = q_0 + \ldots + q_n T^n \quad q_n \neq 0$

$\deg(p) = m$
$\deg(q) = n$

$$p \cdot q = p_0 q_0 + \qquad + \underbrace{p_m q_n}_{\neq 0} T^{m+n}$$

(ii) Sei $p, q \in R[T]$, $p \neq 0 \neq q$. Dann gilt $\deg(p \cdot q) = \underbrace{\deg(p)}_{\geq 0} + \underbrace{\deg(q)}_{\geq 0} \geq 0$, also $pq \neq 0$. $\square$

Insbesondere ist also der Polynomring $K[T]$ ein Integritätsbereich, wenn K ein Körper ist.

Aber $K[T]$ ist kein Körper, es gibt kein $p \in K[T]$ mit $T \cdot p = 1$, denn $\deg(T) = 1$
$\Rightarrow \deg(T \cdot p) = \deg(T) + \deg(p) = \deg(p) + 1 \geq 1$, aber $\deg(1) = 0$.

Aber $K[T]$ ist in einem Körper enthalten, so wie $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten ist!

3. Konstruktion Sei R ein Integritätsbereich, sei $X = \{(s,t) \mid s,t \in R, t \neq 0\} = R \times (R - \{0\})$.
Wir definieren zwei Verknüpfung auf X durch

$$(s,t) \cdot (u,v) = (su, tv)$$
$$(s,t) + (u,v) = (sv + tu, tv)$$

sowie eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(s,t) \sim (s',t') \Leftrightarrow st' = ts'$$

Das ist eine Äquivalenzrelation: $(s,t) \sim (s,t)$ und
$(s,t) \sim (s',t') \Rightarrow (s',t') \sim (s,t)$ (klar)
$(s,t) \sim (s',t') \sim (s'',t'') \Rightarrow st' = s't$ und $s't'' = s''t'$
$$\Rightarrow st't'' = s'tt'' = ts''t' \underset{t' \neq 0}{\Rightarrow} st'' = s''t$$

Schreibe $\frac{s}{t}$ für die Äquivalenzklasse von (s,t),

also $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'} \Leftrightarrow st' = ts'$ (vgl. Bruchrechnung in $\mathbb{Q}$)

Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich: angenommen, $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$ und $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$, also $st' = ts'$ und $uv' = vu'$.

Es folgt $\frac{s'}{t'} \cdot \frac{u'}{v'} = \frac{s'u'}{t'v'} = \frac{s}{t} \cdot \frac{u}{v}$, denn:

$$s'u'tv = sut'v'$$

$$\frac{s'}{t'} + \frac{u'}{v'} = \frac{s'v' + t'u'}{t'v'} = \frac{sv + tu}{tv} = \frac{s}{t} + \frac{u}{v} \quad \text{denn:}$$

$$(s'v' + t'u')tv = (sv + tu)t'v'$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{s't}\,vv' + \underbrace{t't}\,u'v = \underbrace{st'}\,vv' + \underbrace{tt'}\,uv'$$

Also erhalten wir wohldefinierte Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf den Äquivalenzklassen. Es ist leicht nachzurechnen, dass beide Verknüpfungen kommutativ sind und dass die Distributivgesetze gelten. Weiter gilt

$$\frac{s}{t} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{s}{t} = \frac{s}{t}$$

$$\frac{s}{t} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{s}{t} = \frac{s}{t} \qquad \frac{-s}{t} + \frac{s}{t} = \frac{0}{t^2} = \frac{0}{1} = \frac{s}{t} + \frac{-s}{t}$$

Wir setzen $\mathrm{Quot}(R) = \{ \frac{s}{t} \mid s,t \in R,\ t \neq 0 \}$.

<u>Satz</u> Quot(R) ist ein Körper. Die Abbildung
$$R \to \mathrm{Quot}(R), \quad r \mapsto \frac{r}{1}$$
ist ein injektiver Ringhomomorphismus, durch den wir R als Teilring des Körpers Quot(R) auffassen können.

<u>Beweis</u> Quot(R) ist ein Körper: ist $\frac{s}{t} \neq \frac{0}{1}$, also $s \neq 0$, so gilt $\frac{s}{t} \cdot \frac{t}{s} = \frac{1}{1}$, den Rest haben wir vorher schon überlegt.
Ist $\frac{r}{1} = \frac{r'}{1}$, so folgt $r = r'$. $\square$

<u>Beispiel</u> (a) $R = \mathbb{Z}$ $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ und das oben ist genau die Konstruktion der rationalen Zahlen aus $\mathbb{Z}$

(b) Wenn R schon ein Körper ist, dann ist $\mathrm{Quot}(R) = R$ bzgl. der Einbettung
$R \to \mathrm{Quot}(R)$, $r \longmapsto \frac{r}{1}$ (ÜA)

(c) K ein Körper, $R = K[T]$ Polynomring
$\mathrm{Quot}(K[T]) = K(T)$ <u>Körper der rationalen Funktionen über K</u>, Elemente sind von der Gestalt $\frac{p}{q}$ $p, q \in K[T]$, $q \neq 0$

<u>Bemerkung</u> Der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ hat folgende <u>universelle Eigenschaft</u>. Ist K ein Körper, R ein Integritätsbereich und ist

$$\beta : R \longrightarrow K$$

ein injektiver Ringhomomorphismus, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\hat{\beta} : \mathrm{Quot}(R) \to K$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr] & & K \\ & \mathrm{Quot}(R) \arrow[ur, "\hat{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Jetzt zurück zum charakteristischen Polynom.

4. <u>Beobachtung</u> Den Körper K können wir durch die Inklusionen

$$K \longrightarrow K[T] \longrightarrow K(T)$$

als Teilkörper des Rings $K[T]$ bzw. des Körpers $K(T)$ auffassen. Genauso für Matrizen: $X \in K^{m \times n}$ läßt sich auffassen als Matrix in $K(T)^{n\times n}$ oder $K[T]^{n\times n}$. Damit sehen wir: das in §4.18 definiert <u>charakteristische Polynom</u> ist einfach die Determinante der Matrix

$$(\mathbb{1}_n \cdot T - X) \in K(T)^{n\times n}$$

und die explizite Formel aus §4.7 für det zeigt, dass gilt

$$\chi_X = \det(\mathbb{1}_n T - X) \in K[T]$$

weil $(\mathbb{1}_n \cdot T - X) \in K[T]^{n\times n}$

<u>Lemma</u> Sei $X \in K^{n\times n}$ und $S \in GL_n(K)$.

Dann gilt $\chi_X = \chi_{SXS^{-1}}$

<u>Beweis</u> Wir fassen S als Matrix in $K(T)^{n\times n}$ auf. Wegen $SS^{-1} = \mathbb{1}_n$ folgt $S \in GL_n(K(T))$

sowie

$$S(\mathbb{1}_n T - X)S^{-1} = \underbrace{S \mathbb{1}_n T S^{-1}}_{= \mathbb{1}_n T} - SXS^{-1}$$

weil $S(\mathbb{1}_n T) = (\mathbb{1}_n T)S$

also $\det(\mathbb{1}_n \cdot T - X) = \det(S(\mathbb{1}_n \cdot T - X)S^{-1}) = \underbrace{\det(\mathbb{1}_n \cdot T - SXS^{-1})}$

χ_X $\qquad$ §4.8 $\qquad$ $\chi_{SXS^{-1}}$ $\square$

5. Der Satz von Cayley-Hamilton

Sei $X \in K^{n \times n}$, betrachte den Ringhomomorphismus aus §5.1

$$K[T] \to K^{n \times n}$$

$$p = p_0 + p_1 T + \dots + p_m T^m \longmapsto p_0 \mathbb{1}_n + \dots + p_m X^m = p(X)$$

Beobachtung: Ist $Y \in K[T]^{n \times n}$, so gibt es eindeutig bestimmte Matrizen $Y_0, Y_1, \dots, Y_r \in K^{n \times n}$ mit

$$Y = Y_0 + Y_1 \cdot T + Y_2 \cdot T^2 + \dots + Y_r \cdot T^r$$

(schreibe jeden Matrixeintrag als Polynom aus)

(ü4)

Theorem (Satz von Cayley-Hamilton)

Sei $X \in K^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom

$\chi_X = p = p_0 + p_1 T + \ldots + p_n T^n$. Dann gilt

$$\chi_X(X) = p_0 \mathbb{1}_n + p_1 X + \ldots + p_n X^n = 0$$

Beweis Setze $Y = \mathbb{1}_n \cdot T - X \in K[T]^{n\times n}$.

Sei $Y^\# \in K(T)^{n\times n}$ die Komplementärmatrix, vgl §4.13. Es folgt $Y^\# \cdot Y = \chi_X \cdot \mathbb{1}_n$.

Die Formel für die Einträge von $Y^\#$ in §4.13 zeigt, dass gilt $Y^\# \in K[T]^{n\times n}$, alle Einträge von $Y^\#$ sind Polynome in T.

Schreibe $Y^\# = Y_0 + Y_1 \cdot T + \ldots + Y_r T^r$ mit

$Y_0, Y_1, \ldots Y_r \in K^{n\times n}$ wie oben. Jetzt

Koeffizientenvergleich: ...

$$\Psi^{\#}\Psi = \chi_X \cdot 1\!\!1_n$$

$$(\Psi_0 + \Psi_1 \cdot T + \ldots + \Psi_r T^r)(1\!\!1_n T - X) = P_0 1\!\!1_n + P_1 1\!\!1_n \cdot T + \ldots + P_n 1\!\!1_n \cdot T^n$$

Ergibt also:

$$-\Psi_0 X = P_0 1\!\!1_n \qquad | \cdot 1\!\!1_n$$

$$\Psi_0 - \Psi_1 X = P_1 1\!\!1_n \qquad | \cdot X$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Psi_{n-2} - \Psi_{n-1} X = P_{n-1} 1\!\!1_n \qquad | \cdot X^{n-1}$$

$$\Psi_{n-1} = P_n 1\!\!1_n \qquad | \cdot X^n$$

$$\underbrace{-\Psi_0 X + \Psi_0 X - \Psi_1 X^2 + \Psi_1 X^2 \ldots + \Psi_{n-1} X^n}_{} = 0$$

$$= P_0 1\!\!1 + P_1 X + P_2 X^2 + \ldots + P_n X^n \qquad \square$$

6. Das charakteristische Polynom genauer betrachtet

Für jede Matrix $X \in K^{n \times n}$, $a \in K$ gilt $\det(aX) = a^n \det(X)$ nach § 4.4 (L). Insbesondere gilt $\det(-X) = (-1)^n \det(X)$.

Wir hatten das charakteristische Polynom definiert durch $\chi_X = \det(\mathbb{1}_n T - X)$, manche Bücher betrachten stattdessen $\det(X - \mathbb{1}_n T)$ (das haben wir in § 4.14 auch so gemacht). Der Unterschied ist höchstens ein Vorzeichen, die Nullstellen sind die gleichen.

<u>Satz</u> Sei $X \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_X = p_0 + p_1 T + \dots + p_n T^n$. Dann gilt $p_n = 1$ (d.h. χ_X ist <u>normiert</u>, vgl § 4.16)

$p_{n-1} = -\mathrm{tr}(X)$ und $p_0 = (-1)^n \det(X)$

$$\chi_X = T^n + \mathrm{tr}(X) T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(X)$$

<u>Beweis</u> Es gilt $\chi_X(0) = \det(\mathbb{1}_n \cdot 0 - X) = \det(-X)$

$= (-1)^n \det(X) = p_0$

Der Rest mit Induktion nach n.

$n=1$, $X = (\xi_{11})$ $\quad \det(\mathbb{1}_1 \cdot T - X) = T - \xi_{11}$

$\det(X) = \xi_{11} = \mathrm{tr}(X)$ $\quad$ (✓)

Induktionsschritt mit Laplace-Entwicklung, vgl § 4.13.

$Y = \mathbb{1}_n T - X \quad X = (\xi_{ij})_{i,j=1..n}$

$$\det(Y) = \chi_X = (T - \xi_{11}) \det(Y_{11}') - \xi_{12} \det(Y_{12}') + \ldots$$

Nun $Y_{11}' = \mathbb{1}_{n-1} T - X_{11}'$, $\det(Y_{11}') = \chi_{X_{11}'}$

und $\det(Y_{1i}')$ ist ein Polynom von Grad $\leq n-2$, weil nur noch in $n-2$ der Einträge ein T vorkommt. Also gilt

$$\chi_{X_{11}'} = T^{n-1} - \mathrm{tr}(X_{11}') T^{n-2} + q_1 \qquad \deg(q_1) \leq n-3$$

$\deg(\det(Y_{1i}')) \leq n-2$, damit

$$\chi_X = (T - \xi_{11})(T^{n-1} - \mathrm{tr}(X_{11}') T^{n-2}) + q_2 \qquad \deg(q_2) \leq n-2$$

$$= T^n + \underbrace{(-\xi_{11} - \mathrm{tr}(X_{11}'))}_{= \mathrm{tr}(X)} T^{n-1} + \xi_{11} \mathrm{tr}(X_{11}') T^{n-2} + q_2$$

$$= T^n + \mathrm{tr}(X) T^{n-1} + q_3 \qquad \deg(q_3) \leq 2$$

$\square$

__Bem__ Die andern Koeffizienten von χ_X lassen sich mit Hilfe der sogenannten __äußeren Algebra__ durch A ausdrücken.

7. __Der Spezialfall $\chi_X = (T-\lambda)^n$__

Angenommen, X ist eine Matrix mit $\chi_X = (T-\lambda)^n$

z.B. $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oder $X = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Dann gilt nach dem Satz von Cayley-Hamilton

$$\chi_X(X) = (\underbrace{X - \lambda \mathbb{1}_n}_{=Z})^n = 0.$$

Matrizen Z mit dieser Eigenschaft heißen nilpotent.

8. __Def__ Sei V ein K-Vektorraum, sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ mal}} = 0$

so heißt φ __nilpotent__.

Entsprechend heißt eine Matrix $X \in K^{n\times n}$ nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$X^k = 0$

(Setze $\varphi^0 = \mathrm{id}_V$ sowie $X^0 = \mathbb{1}_n$)

Der <u>Nilpotenzgrad</u> von φ (bzw X) ist

$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi^k = 0\} \quad \text{bzw}$$
$$d = \min\{k \in \mathbb{N} \mid X^k = 0\}$$

Also $\varphi^d = 0 \neq \varphi^{d-1}$ und $d \geq 1$ (für $V \neq \{0\}$)

Nilpotenzgrad $d = 1$ bedeutet $\varphi = 0$ (bzw $X = 0$)

<u>Beispiel</u> $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow d = 2$

allgemein $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \rightsquigarrow d = n$

Unser nächstes Ziel ist die Klassifikation von nilpotenten Endomorphismen. Dazu brauchen wir zwei Begriffe, die schon ins Kapitel 2 gepasst hätten.

9. <u>Definition</u> Sei V ein K-Vektorraum und sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt <u>φ-invariant</u>, wenn gilt $\varphi(U) \subseteq U$.

<u>Beispiel</u> Das Bild $\varphi(V) = U$ ist stets φ-invariant, denn

$$\varphi(V) \subseteq V \Rightarrow \varphi(\underbrace{\varphi(V)}_{=U}) \subseteq \varphi(V) = U$$

#

10. Lemma Sei $\varphi \in End(V)$ und sei $v \in V$ mit $\varphi^{d-1}(v) \neq 0$, $\varphi^d(v) = 0$ für ein $d \geq 1$. Dann ist $\{v, \varphi(v), \varphi^2(v), .., \varphi^{d-1}(v)\}$ linear unabhängig. Sei $W = \langle v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)\rangle$. Dann gilt $\dim(W) = d$ und W ist φ-invariant.

Beweis Induktion nach $d \geq 1$

$d = 1 \Rightarrow v \neq 0$, $\varphi(v) = 0$ $W = vK$ 1-dimensional (V)

Induktionsschritt. Sei $\varphi^{d-1}(v) \neq 0 = \varphi^d(v)$. Setze $w = \varphi(v)$

$\Rightarrow \varphi^{d-2}(w) = \varphi^{d-1}(v) \neq 0$ $\varphi^{d-1}(w) = \varphi^d(v) = 0$ also

$w, \varphi(w), \dots, \varphi^{d-2}(w)$ linear unabhängig nach Induktionsannahme.

Ansatz

$$0 = v\lambda_0 + \varphi(v)\lambda_1 + \dots + \varphi^{d-1}(v)\lambda_{d-1} \quad | \ \varphi \text{ anwenden}$$

$$0 = w\lambda_0 + \varphi(w)\lambda_1 + \dots + \varphi^{d-2}(w)\lambda_{d-2}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{d-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\varphi^{d-1}(v)}_{\neq 0}\lambda_{d-1}$$

$\Rightarrow \lambda_{d-1} = 0$ also ist $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d-1}(v)\}$ linear unabhängig und erzeugt einen d-dimensionalen Unterraum U. Ist $u = v\alpha_0 + \dots + \varphi^{d-1}(v)\alpha_{d-1} \in U$

so gilt $\varphi(u) = \varphi(v)\alpha_0 + \dots + \varphi^{d-1}(v)\alpha_{d-2} \in U$

□

11. Definition Sei I eine endliche Indexmenge. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen eines Vektorraums V. Wir setzen

$$\sum_{i\in I} U_i = \Big\{ \sum_{i\in I} u_i \;\Big|\; u_i \in U_i \Big\} \subseteq V$$

Offensichtlich ist $\sum_{i\in I} U_i$ ein Unterraum von V und es gilt für jedes $j\in I$

$$U_j \subseteq \sum_{i\in I} U_i \subseteq \langle \bigcup\{U_i \mid i\in I\}\rangle \text{ , also}$$

$$\sum_{i\in I} U_i = \langle \bigcup\{U_i \mid i\in I\}\rangle$$

Lemma Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie von Unterräumen von V mit $\sum_{i\in I} U_i = V$.

Dann sind äquivalent:

(i) Zu jedem $v\in V$ gibt es eindeutige Vektoren $u_i \in U_i$ mit $\sum_{i\in I} u_i = v$

(ii) Für jedes $j\in I$ gilt

$$U_j \cap \Big(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} U_i\Big) = \{0\}$$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei

$$w \in U_j \cap \Big(\sum_{i \neq j} U_i \Big) \Rightarrow$$ es gibt $u_i \in U_i$ mit

$w = \sum_{i \neq j} u_i \in U_j$ Aus der Eindeutigkeit folgt $w = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, es gibt $u_i, u_i' \in U_i$ mit

$\sum_{i \in I} u_i' = \sum_{i \in I} u_i$. Für jedes $j \in I$ folgt

$$\underbrace{u_j' - u_j}_{\in U_j} = \sum_{i \neq j} (u_i - u_i') \in \sum_{i \neq j} U_i$$ also $u_j' - u_j = 0$ $\square$

Wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus dem Lemma erfüllt sind, sagt man, V ist die <u>direkte Summe</u> der Familie von Unterräumen $(U_i)_{i \in I}$ und schreibt kurz

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i$$

<u>Bemerkungen</u>

(a) Ist $B_i \subseteq U_i$ eine Basis und gilt

$V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $B = \bigcup \{ B_i \mid i \in I \}$

eine Basis von V. Es folgt

$$\dim(V) = \sum_{i\in I} \dim(U_i)$$

(b) Ist umgekehrt $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ mit $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$ mit $U_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$

Insbesondere $V = \bigoplus_{b\in\mathcal{B}} bK$

(c) Ist $\# I \geq 3$ so reicht es nicht, statt (ii) zu verlangen, dass gilt $U_i \cap U_j = \{0\}$

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U_0 = \mathbb{R}\times\{0\}$ $\quad U_1 = \{0\}\times\mathbb{R}$

$U_2 = \{(s,s) \mid s\in\mathbb{R}\}$

$U_i \cap U_j = \{0\}$ für $i\neq j$ und $\mathbb{R}^2 = U_0 + U_1 + U_2$,

aber keine direkte Summe:

$(1,1) \in U_2$ $\qquad \underbrace{(1,1)}_{\in U_2} = \underbrace{(0,1)}_{\in U_1} + \underbrace{(1,0)}_{\in U_0}$

(d) Man kann direkte Summen auch für <u>unendliche</u> Indexmenge I definieren. Dann betrachtet man Folgen von Vektoren $(u_i)_{i\in I}$, wo nur endlich viele $u_i \neq 0$ sind. Mit dieser einen Modifikation funktioniert alles, was wir hier gemacht haben genauso. In unendlich dimensionalen Vektorräumen kann das nützlich sein.

12. Theorem (Struktur von nilpotenten Endomorphismen)

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent vom Nilpotenzgrad $d \geq 1$. Dann gibt es eine (endliche) Familie von Unterräumen $(U_i)_{i\in I}$ sowie Vektoren $u_i \in U$, so dass gilt:

(i) $V = \bigoplus_{i\in I} U_i$

(ii) $\dim(U_i) = d_i$ und U_i hat als Basis $u_i, \varphi(u_i), \varphi^2(u_i), \dots, \varphi^{d_i-1}(u_i)$

(iii) $\varphi^{d_i}(u_i) = 0$, also ist U_i φ-invariant für alle $i \in I$

(iv) $d = \max\{d_i \mid i \in I\}$

Bem Der Satz gilt auch für unendlich-dimensionale Vektorräume, wenn man unendliche direkte Summen benutzt. Der folgende Beweis benutzt nicht, dass $\dim(V) < \infty$.

<u>Beweis</u> Induktion nach d.

<u>$d=1$</u> $\leadsto$ $\varphi = 0$ Nullabbildg. Sei $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V. Setze $U_i = b_i K = \{b_i a \mid a \in K\}$ $\leadsto$ Beh.

Induktionsschritt. Sei $d > 1$, wir nehmen an, dass die Aussage für kleinere Werte gilt.

Setze $\varphi(V) = V'$. Dann ist $\varphi(V') \subseteq V'$ vgl §5.9 betrachte die Einschränkg $\varphi' : V' \to V'$
$$v \longmapsto \varphi(v)$$

Für jedes $v = \varphi(w) \in V'$ gilt $(\varphi')^{d-1}(v) = \varphi^{d}(w) = 0$, der Nilpotenzgrad von φ' ist kleiner als d.

Also gibt es $u_i' \in V'$ für $i \in I'$ wie in der Behauptung, $U_i' = \langle u_i', \varphi(u_i'), \ldots, \underbrace{\varphi^{d_i'-1}(u_i')}_{\neq 0} \rangle$ d_i'-dimensional, $V' = \bigoplus_{i \in I'} U_i'$.

Wähle $u_i \in V$ mit $\varphi(u_i) = u_i'$, setze

$$U_i = \langle u_i, \underbrace{\varphi(u_i)}_{= u_i'}, \ldots, \underbrace{\varphi^{d_i'}(u_i)}_{= \varphi^{d_i'-1}(u_i') \neq 0} \rangle \quad , \text{ setze } d_i = d_i' + 1.$$

Nach §5.10 ist $u_i, \ldots, \varphi^{d_i'}(u_i)$ eine Basis von U_i und U_i ist φ-invariant.

Wegen $\underbrace{\varphi^{d_i'}(u_i)}_{\neq 0} \in U_i'$ sind die Vektoren

$\{ \varphi^{d_i'}(u_i) \mid i \in I \}$ linear unabhängig und

sie liegen im Kern von φ. Mit dem

Ergänzungslemma §3.5 ergänzen wir

durch Vektoren $\{u_j \mid j \in J\}$ zu einer

Basis von $\ker(\varphi)$, mit einer zu I'

disjunkten Indexmenge J. $J \cap I' = \emptyset$ Setze $I = I' \cup J$

sowie $U_j = u_j K$ für $j \in J$.

Behauptung: Die Menge

$$B = \{ u_i, \varphi(u_i), \ldots \varphi^{d_i-1}(u_i) \mid i \in I' \} \cup \{ u_j \mid j \in J \}$$

ist eine Basis von V.

Denn: Sei $v \in V$ beliebig. Dann ist $\varphi(v) \in V'$,

$$\varphi(v) = \sum_{i \in I'} u_i' a_{i0} + \ldots + \varphi^{d_i'-1}(u_i') a_{i,d_i'-1} \qquad a_{ik} \in K$$

Setze $\tilde{v} = \sum_{i \in I'} u_i a_{i0} + \ldots + \varphi^{d_i'-1}(u_i) a_{i,d_i'-1}$ im Erzeugnis von B

$\Rightarrow \varphi(\tilde{v}) = v$, also $\tilde{v} - v \in \ker(\varphi)$ im Erzeugnis von B

$\Rightarrow v \in \langle B \rangle$.

Die Menge $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig:

Ansatz $\qquad c_j, c_{ik} \in K$

$$0 = \sum_{i \in I'} u_i c_{i0} + \dots + \varphi^{d_i-1}(u_i)\, c_{i,d_i-1} + \sum_{j \in J} u_j c_j \quad \Big| \ \varphi \text{ anwenden}$$

$$0 = \sum_{i \in I'} u_i' c_{i0} + \dots + \varphi^{d_i'-1}(u_i')\, c_{i,d_i'-1} \qquad \boxed{d_i = d_i' + 1}$$

$$\Rightarrow \quad c_{i0} = \dots = c_{i,d_i'-2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i \in I'} \underbrace{\varphi^{d_i-1}(u_i)\, c_{i,d_i-1}}_{\in U_i'} + \sum_{j \in J} u_j c_j = 0$$

aber das war eine Basis von $\ker(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad c_{i,d_i-1} = 0 = c_j \qquad \text{für alle } i,j$$

Also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Es folgen (i), (ii) und (iii).

Zu (iv). Nach Konstruktion gilt $d_i \le d$,

Sei $\tilde{d} = \max\{d_i \mid i \in I\}$. Es folgt

$\varphi^{\tilde{d}-1} \neq 0$, aber $\varphi^{\tilde{d}}(\mathcal{B}) = 0$, also $\varphi^{\tilde{d}} = 0$ $\qquad \square$

<u>Bemerkung</u> (a) Aus dem Beweis läßt sich ein Algorithmus machen, mit dem man die Basis $\{u_i, \dots, \varphi^{d_i-1}(u_i) \mid i \in I\}$ finden kann.

Setze $V_r = \varphi^r(V)$, also $V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \cdots \supseteq V_d = \{0\}$

Die Einschränkung von φ auf V_{d-1} ist die Nullabbildung, wähle eine Basis B_{d-1} von V_{d-1}. Betrachte dann die Einschränkung von φ auf V_{d-2}, wähle φ-Urbilder von B_{d-1} in V_{d-2}, ergänze zu einer Basis B_{d-2} von V_{d-2} durch Vektoren im Kern, usw (ÜA) *

(b) Die Matrix von φ bezüglich dieser Basis hat eine einfache Form. Die Einschränkung von φ auf U_i hat die Eigenschaft

$$\varphi^k(u_i) \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi^{k+1}(u_i)$$

also die Darstellungsmatrix bzgl $\varphi^{d_i-1}(u_i), \varphi^{d_i-2}(u_i), \dots, u_i$

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \Big\updownarrow d_i \\
\varphi^{d_i-1}(u_i) \quad \dots \quad \varphi(u_i) \quad u_i
\end{array}$$

("jeder Basisvektor rückt eins weiter")

13. Für $d_i \geq 1$ und $\lambda \in K$ definieren wir

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{l \times l}$$

<u>Satz</u> Sei $X \in K^{n \times n}$ nilpotent vom Nilpotenzgrad $d \geq 1$. Dann gibt es $S \in GL_n(K)$ und Zahlen $d_1, \dots, d_r \leq d$ mit $d = \max\{d_1, \dots, d_r\}$, $d_1 + d_2 + \dots + d_r = n$ so, dass gilt

$$SXS^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{J(0,d_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J(0,d_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(0,d_r)} \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u> Das folgt direkt aus § 5.12, S ist die Basiswechselmatrix

$$S = {}_{B}M_{B_n}(id)$$

$B_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ „Standardbasis" von K^n

B die Basis aus § 5.12. □

Korollar Sei $X \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_X = (T-\lambda)^n$, für ein $\lambda \in K$. Dann gibt es $S \in GL_n(K)$, $d_1, \dots, d_r \geq 1$ mit $d_1 + \dots + d_r = n$ so, dass gilt

$$SXS^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda, d_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J(\lambda, d_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(\lambda, d_r)} \end{pmatrix}$$

Beweis Setze $Y = X - \lambda \mathbb{1}_n$. Nach Cayley-Hamilton gilt $\chi_X(X) = 0$, also $Y^n = 0$. Wende den vorigen Satz an auf Y,

$$SYS^{-1} = \begin{pmatrix} J(0, d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0, d_r) \end{pmatrix}$$

$$X = \lambda \mathbb{1}_n + Y \Rightarrow SXS^{-1} = \underbrace{S \mathbb{1}_n S^{-1} \lambda}_{= \lambda \mathbb{1}_n} + SYS^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} J(\lambda, d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda, d_r) \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung</u> (a) Die Matrizen $J(\lambda,\ell) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{\ell\times\ell}$ nennt man <u>Jordan-Blöcke</u> (Camille Jordan).

Wegen $J(\lambda,\ell) = \mathbb{1}_\ell \lambda + J(0,\ell)$ sind sie für $\lambda \neq 0$ stets einfach invertierbar (geometrische Reihe -> ÜA)

(b) Für $k \geq \ell$ gilt $J(0,\ell)^k = 0$. Damit sieht man sofort, dass die Zahlen $d_1, \dots, d_r$ im Satz §5.13 <u>eindeutig</u> bestimmt sind, wenn wir annehmen, dass $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$ gilt. Denn: sei φ die zu X gehörige lin. Abbildung

$$\dim \ker(\varphi) = r \;(= \#\{i \mid d_i \geq 1\})$$

$$\dim \ker(\varphi^2) = \dim(\ker(\varphi)) + \#\{i \mid d_i \geq 2\}$$

$$\dim \ker(\varphi^2) = \dim(\ker(\varphi^2)) + \#\{i \mid d_i \geq 3\}$$

$$\vdots$$

Unser Ziel ist nun, ein ähnliches Ergebnis für kompliziertere charakteristische Polynome zu beweisen. Dafür müssen wir $K[T]$ genauer betrachten.

14. Teilen mit Rest in $K[T]$ – Polynomdivision

Satz Sei K ein Körper und $p, q \in K[T]$ mit $q \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $r, s \in K[T]$ mit

$$p = q \cdot s + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

Beweis Existenz Wenn $\deg(p) < \deg(q)$ setze $s = 0$ und $r = p$ $\Rightarrow$ fertig.

Sei jetzt $\deg(p) = n \geq \deg(q) = m$. Induktion nach n.

$\boxed{n=0}$ $\Rightarrow$ $p = p_0 T^0$, $q = q_0 T^0$, $p_0, q_0 \neq 0$

$p = (p_0 q_0^{-1})\, p + 0$ $\Rightarrow$ fertig

Induktionsschritt $p = p_0 + \ldots + p_n T^n \quad q = q_0 + \ldots + q_m T^m$

$p_n, q_m \neq 0$. Setze $\tilde{p} = p - p_n q_m^{-1} q T^{n-m}$

$\Rightarrow \deg(\tilde{p}) < \deg(p) \Rightarrow \tilde{p} = q\tilde{s} + \tilde{r}$ wie behauptet

$$p = \tilde{p} + p_n q_m^{-1} q T^{n-m} = q\underbrace{(\tilde{s} + p_n q_m^{-1} T^{n-m})}_{=s} + \tilde{r}$$

Eindeutigkeit $\quad p = qs + r = q\tilde{\tilde{s}} + \tilde{\tilde{r}}$

$$\Rightarrow q(s - \tilde{\tilde{s}}) = \underbrace{\tilde{\tilde{r}} - r}_{\deg < \deg(q)} \quad \Rightarrow \quad s - \tilde{\tilde{s}} = 0 = \tilde{\tilde{r}} - r$$

$\square$

<u>Korollar</u> Sei $\dim(V) = n$ und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.
Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom von minimalem Grad, $\mu_\varphi \in K[T]$, mit $\mu_\varphi(\varphi) = 0$. Ist $p \in K[T]$ ein Polynom mit $p(\varphi) = 0$, so gibt es $s \in K[T]$ mit

$$p = \mu_\varphi \cdot s$$

<u>Beweis</u> Sei $L = \{ p \in K[T] \mid p \text{ normiert und } p(\varphi) = 0 \}$
Wegen $\chi_\varphi \in L$ ist $L \neq \emptyset$. Wähle $\mu_\varphi \in L$ mit minimalem Grad. Ist nun $p \in L$ beliebig, so

$$p = \mu_\varphi \cdot s + r \qquad \deg(r) < \deg(\mu_\varphi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{p(\varphi)}_{=0} = \underbrace{\mu_\varphi(\varphi)}_{=0} \cdot s(\varphi) + r(\varphi)$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0$$ $\square$

Man nennt μ_φ das <u>Minimalpolynom</u> von φ.
Entsprechend ist das Minimalpolynom einer Matrix $X \in K^{n \times n}$ definiert als das eindeutig normierte Polynom $\mu_X \in K[T]$ von kleinstem Grad mit

$$\mu_X(X) = 0$$

$\#$

15. Teilbarkeit im Polynomring

Für $p, q \in K[T]$ schreibt man $p \mid q$ "p teilt q" wenn es $s \in K[T]$ gibt mit $q = p \cdot s$.

Wenn gilt $p \mid \tilde{p}$ und $\tilde{p} \mid p$, so folgt $\tilde{p} = p \cdot a$ für ein $a \in K^*$, denn dann gilt $\tilde{p} = s \cdot p$ $\quad p = \tilde{s}\tilde{p}$
$\Rightarrow p = \tilde{s} s p \Rightarrow s, \tilde{s} \in K[T]^* = K^*$

Ein Polynom $p \in K[T]$ heißt <u>irreduzibel</u>, wenn gilt $\deg(p) \geq 1$ <u>und</u> wenn es kein $r, s \in K[T]$ gibt mit $\deg(r), \deg(s) \geq 1$ und $p = r \cdot s$.

<u>Bsp</u> Jedes Polynom vom Grad 1, $p = aT - b$ ist irreduzibel, denn: $p = r \cdot s \Rightarrow \underbrace{\deg(r)}_{\geq 1} + \underbrace{\deg(s)}_{\geq 1} = 1$ ↯

Sind $p_1, \ldots, p_n \in K[T]$ Polynome, so heißt $q \in K[T]$ ein <u>größter gemeinsamer Teiler</u> von $p_1, \ldots, p_n$ wenn gilt:

(i) $q \mid p_i$ für alle $i = 1 \ldots n$

(ii) Wenn $r \in K[T]$ ebenfalls alle p_i teilt, so gilt $r \mid q$.

Klar: Ist q ein ggT, so auch aq für alle $a \in K^*$, es gibt nicht "den ggT". Sind q und $\tilde{q}$ beides ggTs, so folgt $\tilde{q} = a \cdot q$ für ein $a \in K^*$

16. <u>Satz</u> Sei $p_1, \dots, p_n \in K[T]$, $\deg(p_i) \geq 0$

Dann gibt es einen größten gemeinsamen Teiler q von $p_1, \dots, p_n$ sowie $s_1, \dots, s_n \in K[T]$ mit

$$q = p_1 s_1 + \dots + p_n s_n$$

<u>Beweis</u> Sei $L = \{ p_1 r_1 + \dots + p_n r_n \mid r_1, \dots, r_n \in K[T] \}$

Wähle ein Element $q \in L$ von minimalem Grad ≥ 0 $\leadsto$ $q = p_1 s_1 + \dots + p_n s_n$

Ist $\tilde{p} \in L$ so liefert Teilen mit Rest

$$\tilde{p} = q \cdot s + r \qquad \deg(r) < \deg(q)$$

sowie $r = \tilde{p} - q \cdot s \in L \Rightarrow r = 0$ d.h.

Für <u>alle</u> $\tilde{p} \in L$ gilt $q \mid \tilde{p}$, insbesondere

$$q \mid p_i \quad i = 1, \dots, n$$

Wenn gilt $\tilde{q} \mid p_i$ $i = 1 \dots n$, so folgt

$$\tilde{q} \mid p_1 s_1 + \dots p_1 s_n = q$$ also ist q ein größter gemeinsamer Teiler. $\square$

17. <u>Satz</u> Sei $p \in K[T]$ mit $\deg(p) \geq 1$.

Sei $a \in K$ eine Nullstelle, $p(a) = 0$.

Dann gilt

$$(T-a) \mid p$$

d.h. $p = (T-a) \cdot q$ für ein $q \in K[T]$.

<u>Beweis</u> Teilen mit Rest

$$p = (T-a) \cdot q + r \qquad \deg(r) < \deg(T-a) = 1$$

$$r = r_0 T^0$$

$$p(a) = \underbrace{(a-a) \cdot q(a)}_{=0} + r(a)$$

$$\Rightarrow r = 0$$

$\square$

<u>Korollar</u> Ist $p \in K[T]$ mit $\deg(p) = n \geq 1$, so hat p höchstens n verschied. Nullstellen

<u>Beweis</u> $a_1, \dots, a_m$ Nullstellen $\Rightarrow$

$$p = \underbrace{(T-a_1) \cdots (T-a_m)}_{\text{Grad } m} \cdot s \qquad m \leq \deg(p) = n$$

$\square$

18. Lemma (Euklids Lemma für Polynome)

Sei $p, q, r \in K[T]$ mit $p \mid q \cdot r$. Wenn p irreduzibel ist, so folgt $p \mid q$ oder $p \mid r$.

Beweis Angenommen, $p \nmid q$. Dann ist $1 \in K$ ein größter gemeinsamer Teiler von p und q, weil p irreduzibel ist. Also

$$1 = p \cdot s_1 + q \cdot s_2 \qquad \text{für } s_1, s_2 \in K[T]$$

$$\Rightarrow \quad r = r\underbrace{p}s_1 + \underbrace{rq}s_2 \quad \Rightarrow p \mid r \qquad \square$$

19. Satz Sei K ein Körper und $p \in K[T]$, $p \neq 0$. Dann gibt es normierte irreduzible Polynome $p_1, \dots, p_m \in K[T]$ sowie $a \in K^*$ mit $p = a p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$. Die p_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

(vgl. Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$)

<u>Beweis</u> <u>Existenz</u> mit Induktion nach $\deg(p) \geq 0$

$\deg(p) = 0 \rightsquigarrow p = p_0 T^0$ ~~rein~~ fertig.

Jetzt $\deg(p) = n \geq 1$

1. Fall p irreduzibel, $p = p_0 + \dots + p_n T^n$ $\quad p_n \neq 0$

$$\Rightarrow p = p_n \underbrace{\left(T^n + T^{n-1} p_{n-1} p_n^{-1} + \dots + p_0 p_n^{-1} \right)}_{\text{normiert}}$$

2. Fall p reduzibel, $p = r \cdot s$ $\quad \deg(r), \deg(s) \geq 1$

$\Rightarrow r = a r_1 \cdots r_k \quad s = b s_1 \cdots s_l \quad a, b \in K^*$

$r_i, s_i \in K[T]$ normiert $\rightsquigarrow$

$p = ab \cdot r_1 \cdots r_k s_1 \cdots s_l$ fertig.

<u>Eindeutigkeit</u> $p = a p_1 \cdots p_k = b q_1 \cdots q_l$

$a, b \in K^*$, $p_i, q_i \in K[T]$ normiert und irreduzibel

Es folgt $p = a T^n + \dots = b T^n + \dots \Rightarrow a = b \neq 0$

$\Rightarrow p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_l$

Induktion nach $k \geq 1$ $\quad (k = 0 \Rightarrow l = 0$ klar$)$

$\boxed{k=1}$ $p_1 = q_1 \cdots q_l$ irreduzibel $\Rightarrow l = 1$

$$p_1 \mid p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euklids Lemma}}}{\Rightarrow} p_1 \mid q_j \quad \text{für ein } 1 \leq j \leq l$$

OE $j = 1$

$p_1 \mid q_1$ beide normiert $\Rightarrow p_1 = q_1$

$p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} k = l$ und

$p_j = q_j$ ev. nach Umnummerierung der q_j $\square$

Umformulierung von Satz §5.19.

Für jedes $p \in K[T]$ mit $p \neq 0$ existiert $a \in K^*$ sowie irreduzible normierte Polynome $p_i \in K[T]$, $i = 1, \dots, m$

$$p = a \cdot \prod p_i^{k_i} \qquad k_i \geq 1$$

und $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$. Bis auf die Reihenfolge sind die p_i eindeutig bestimmt.

Ob ein Polynom irreduzibel ist, hängt stark vom Körper K ab!

<u>Bsp</u> $p = T^2 + 1$

(a) $K = \mathbb{C}$ $\quad p = (T-i)(T+i)$, denn $i^2 = -1$ in $\mathbb{C}$

(b) $K = \mathbb{F}_2$ $\quad p = (T+1)^2$ denn $2T = 0$ in $\mathbb{F}_2$

$\rightsquigarrow p$ reduzibel für $K = \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$

(c) $K = \mathbb{R}$ Angenommen, p reduzibel $\rightsquigarrow p = (T-a)(T-b) = T^2 - (a+b)T + ab$

$\rightsquigarrow a + b = 0, b = -a \rightsquigarrow -a^2 = 1$ ↯ also ist p irreduzibel für $K = \mathbb{R}$ $\triangledown$

20. **Theorem** Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\dim(V) \geq 1$, sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$, wobei die p_i irreduzibel sind und $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.

Setze $U_i := \ker(p_i(\varphi)^{k_i}) \subseteq V$. Dann gilt

(i) $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$

(ii) Jeder Unterraum U_i ist φ-invariant.

(iii) Das Minimalpolynom der Einschränkung

$$\varphi_i : U_i \to U_i \ , \ v \mapsto \varphi(v)$$

ist genau $p_i^{k_i}$. Insbesondere ist $U_i \neq \{0\}$

Beweis (ii) Sei $v \in U_i$, also $p_i(\varphi)^{k_i}(v) = 0$.

Es folgt
$$\begin{aligned} p_i(\varphi)^{k_i}(\varphi(v)) &= (p_i(\varphi)^{k_i} \circ \varphi)(v) \\ &\overset{*}{=} (\varphi \circ p_i(\varphi)^{k_i})(v) \\ &= \varphi(0) = 0 \end{aligned}$$

[$*$ $p_i^{k_i} = T^l + \ldots + T a_1 + a_0 \ , \ a_i \in K$

$p_i^{k_i}(\varphi) = \varphi^l + \ldots + \varphi a_1 + a_0 \, id_V$

$\Rightarrow \varphi \circ (p_i^{k_i}(\varphi)) = \varphi^{l+1} + \ldots + a_0 \varphi = (\varphi^l + \ldots + a_0 \, id_V) \circ \varphi$]

also ist jeder Unterraum U_i φ-invariant.

(ii) <u>Beh</u>: $V = \sum_{i=1}^m U_i$

Setze $q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m p_j^{k_j}$ $\leadsto$ $\mu_\varphi = p_i^{k_i} \cdot q_i$

und ein ggT von $q_1, \dots, q_m$ ist 1,
es gibt keinen gemeinsamen irreduziblen Faktor. Also
gibt es nach § 5.16 Polynome $s_i \in K[T]$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^m q_i \cdot s_i \implies id_V = \sum_{i=1}^m q_i(\varphi) s_i(\varphi).$$

Für $v \in V$ setze $v_i = q_i(\varphi) \cdot s_i(\varphi)(v)$. Es
folgt $\underbrace{p_i^{k_i}(\varphi)\, q_i(\varphi)}_{=\mu_\varphi(\varphi)} s_i(\varphi)(v) = 0$, also

$v_i \in U_i$ und $\sum_{i=1}^m v_i = v$ $\square$

<u>Beh</u> Für jedes i gilt $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$

Sei $W_i = U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j$. Dann ist W_i
φ-invariant (weil alle U_k φ-invariant sind)
und für jedes $w \in W_i$ gilt

$P_i^{k_i}(\varphi)(w) = 0 = \prod_{j \neq i} P_j^{k_j}(\varphi)(w)$. Das Minimal-

polynom von $\begin{array}{c} W \to W \\ w \mapsto \varphi(w) \end{array}$ teilt also sowohl

$P_i^{k_i}$ als auch $\prod_{j \neq i} P_j^{k_j}$, aber ein ggT davon

ist 1, also ist 1 das Minimalpolynom

$\Rightarrow W_i = \{0\}$ ↯

(iii) Für jedes $w \in U_i$ gilt nach Definition

$P_i^{k_i}(\varphi)(w) = 0$, also $\mu_{\varphi_i} \mid P_i^{k_i} \Rightarrow \mu_{\varphi_i} = P_i^{l_i}$ $l_i \leq k_i$

sowie $\prod_{i=1}^{m} \mu_{\varphi_i}(\varphi) = 0 \Rightarrow \mu_\varphi \mid \prod_{i=1}^{m} \mu_{\varphi_i} \Rightarrow l_i = k_i$

$\square$

Wir formulieren das für Matrizen.

21. <u>Satz</u> Sei V ein endlich dimensionaler K Vektorraum mit $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$.

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und seien alle U_i φ-invariant, $0 < \dim(U_i) = d_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Sei $B_i \subseteq U_i$ eine Basis, $B_i = \{ b_{i,1}, \dots, b_{i,d_i} \}$ und sei $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Bezüglich der Basis $B = \{ b_{1,1}, \dots, b_{1,d_1}, b_{2,1} \dots b_{2,d_2}, \dots \}$ hat dann φ die Darstellungsmatrix

$$
{}_B M_B(\varphi) = X = \begin{pmatrix} \boxed{X_1} & & & 0 \\ & \boxed{X_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{X_m} \end{pmatrix}
$$

wobei $X_i \in K^{d_i \times d_i}$ die Darstellungsmatrix

der Einschränkung $\varphi_i : U_i \to U_i$ bzgl.
$u \longmapsto \varphi(u)$

der Basis $\mathcal{B}_i$ ist.

Es gilt $\det(X) = \det(X_1) \cdot \det(X_2) \cdots \det(X_m)$

sowie $\chi_X = \chi_{X_1} \cdot \ldots \cdot \chi_{X_m}$

<u>Beweis</u> Für den Basisvektor $b_{i,k} \in \mathcal{B}_i$

gilt $\varphi(b_{ik}) = \sum_{\substack{j=1\ldots m \\ l=1\ldots d_j}} b_{jl}\, \xi_{jl,ik} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(b_{ik}) \in U_i}}{=} \sum_{l=1\ldots d_i} b_{il}\, \xi_{il\, ik}$

letztere sind die Einträge von ${}_{\mathcal{B}_i}M_{\mathcal{B}_i}(\varphi_i)$. Damit

ergibt sich die Matrizenform wie behauptet.

Zur Formel für die Determinante. Betrachte

$A \in K^{s \times s}$ $\quad B \in K^{t \times t}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}s \\ \}t \end{matrix} \in K^{(s+t)\times(s+t)}$$
$$\qquad\ \ \underbrace{\quad}_{s}\quad \underbrace{\quad}_{t}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}s \\ \}t \end{matrix} \in K^{(s+t)\times(s+t)}$$
$$\qquad\ \ \underbrace{\quad}_{s}\quad \underbrace{\quad}_{t}$$

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix}.$$

Das Berechnungsverfahren für Determinantenfunktion aus §4.5 zeigt $\det(\tilde{A}) = \det A$, $\det(\tilde{B}) = \det(B)$

also $\det\begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$ #

Mehrfache Anwendung dieser Beziehung liefert

$\det(X) = \det(X_1) \cdots \det(X_m)$ und weil

$\chi_{X_i} = \det(\mathbb{1}_{d_i} T - X_i)$ gilt auch

$\chi_X = \chi_{X_1} \cdots \chi_{X_m}$ $\square$

Wir kombinieren jetzt alles zum

Satz über die <u>Jordansche Normalform</u>

22 Lemma Sei V ein d-dimensionale K-Vektorraum, sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Angenommen, es gilt für das Minimalpolynom

$$\mu_\varphi = (T-\alpha)^m \qquad \text{für ein } \alpha \in K.$$

Dann gilt $\chi_\varphi = (T-\alpha)^d$ und es gibt eine Basis $B \subseteq V$ mit

$$_B M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} J(\alpha,l_1) & & & 0 \\ & J(\alpha,l_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\alpha,l_k) \end{pmatrix}$$

$d = l_1 + l_2 + \dots + l_k$, $\quad J(\alpha, l_i) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$

Jordanblock in $K^{l_i \times l_i}$, $i = 1 \dots k$

Weiter ist $m = \max\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$

Beweis Das haben wir schon bewiesen. Setze $\psi = \varphi - \alpha \cdot id_V$ ~~$\Rightarrow$~~ $\psi^m = 0$, d.h. ψ ist nilpotent. Nach § 5.13 gibt es ein Basis $\mathcal{B} \subseteq V$ mit

$$ {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} J(0,l_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(0,l_k) \end{pmatrix} $$

Wegen $\psi + \alpha \cdot \mathrm{id}_V = \varphi$ folgt

$$ {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J(\alpha,l_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\alpha,l_k) \end{pmatrix} $$

sowie $l_1 + \ldots + l_k = d$ und $m = \max\{l_1, \ldots, l_k\}$ ist der Nilpotenzgrad von ψ. Aus der Formel §4.4 (iv) folgt $\chi_\varphi = (T-\alpha)^d$ $\square$

23. Theorem (Die Jordansche Normalform)

Sei V ein d-dimensionaler K-Vektorraum, sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Angenommen, es gilt

$$\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{n} (T - \alpha_i)^{m_i} \qquad \text{für } \alpha_i \in K, \; m_i \geq 1$$

mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Sei

$U_i = \ker(\varphi - \alpha_i \mathrm{id}_V)^{m_i}$ sowie $d_i = \dim(U_i)$.

Es gibt dann Basen $\mathcal{B}_i \subseteq U_i$ so dass bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} X_1 & & & 0 \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_n \end{pmatrix}$$

$$X_i \in K^{d_i \times d_i}, \quad X_i = \begin{pmatrix} J(\alpha_i, d_{i,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\alpha_i, d_{i,k_i}) \end{pmatrix}$$

Daher gilt $d = d_1 + \dots + d_n$

$d_i = d_{i,1} + d_{i,2} + \dots + d_{i,k_i}$ sowie $\chi_\varphi = \prod_{i=1}^{m} (T-\alpha_i)^{d_i}$

$m_i = \max\{d_{i,1}, \dots, d_{i,k_i}\}$

<u>Beweis</u> Die Polynome $(T-\alpha_i) = P_i$ sind irreduzibel, weil sie Grad 1 haben. Nach § 5.20 gilt $V = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$. Das Minimalpolynom der Abbildung $\varphi_i : U_i \to U_i,\ v \mapsto \varphi(v)$ ist $(T-\alpha_i)^{m_i}$ nach § 5.20. Es gibt also nach § 5.22 eine Basis $B_i \subseteq U_i$, so dass $X_i = {}_{B_i}M_{B_i}(\varphi_i)$ die angegebene Form hat. Bezüglich $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ hat $X = {}_{B}M_{B}(\varphi)$ dann nach § 5.21 die angegebene Form. $\square$

Wir betrachten gleich eine Anwendung (in der Physik). Erst eine Vorüberlegung.

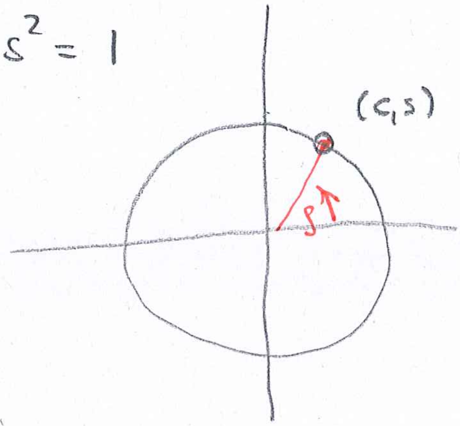
24. Lemma Sei $z \in \mathbb{C}$, sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^m = z$.

Beweis Schreibe z als $z = r \cdot (c + s \cdot i)$

$r, c, s \in \mathbb{R}$ $\quad r \geq 0 \quad c^2 + s^2 = 1$

$c = \cos(\rho)$

$s = \sin(\rho)$



als Drehstreckung

$$z = \begin{pmatrix} \cos(\rho) & -\sin(\rho) \\ \sin(\rho) & \cos(\rho) \end{pmatrix} \cdot r$$

vgl. § 3.18
Wilking-Skript Satz 5.6

Wähle $s \in \mathbb{R}$ mit $s^m = r$. Dann

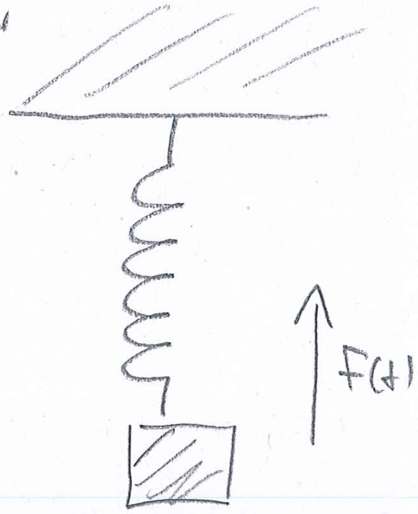
löst $$\begin{pmatrix} \cos(\rho/m) & -\sin(\rho/m) \\ \sin(\rho/m) & \cos(\rho/m) \end{pmatrix} \cdot s = w$$

das Problem, denn der Drehwinkel ist $\frac{\rho}{m}$.

$\square$

#

25. Ein Beispiel aus der klassischen Mechanik



Ein Gewicht schwingt an einer Feder. Die Gleichung für die zeitabhängige Schwingung ist

$$f'' + 2 r f' + \omega^2 f = 0$$

Dabei ist $\omega > 0$ von der Feder und der Masse des Gewichts abhängig und $r \geq 0$ ist ein von der Reibung abhängiger Faktor. Schreibe das um als

$$f' = g$$
$$g' = -2rg - \omega^2 f$$

Zu jedem Zeitpunkt t gilt dann

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2r \end{pmatrix}}_{= A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

(Das ist eine sogenannte Differentialgleichung)

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix} T & -1 \\ \omega^2 & T+2r \end{pmatrix} = T^2 + 2rT + \omega^2$$
$$= (T-\alpha)(T-\beta)$$

$$\alpha = -r + \sqrt{r^2 - \omega^2} \in \mathbb{C}$$
$$\beta = -r - \sqrt{r^2 - \omega^2} \in \mathbb{C}$$

1. Fall $r^2 > \omega^2$ Dann gibt es $S \in GL_2(\mathbb{R})$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ Basiswechsel

Bezüglich der neuen Basis suchen wir Funktion $\tilde{f}, \tilde{g}$ mit $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}' \\ \tilde{g}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}$$

raten $\rightsquigarrow$ $\tilde{f}(t) = a \exp(\alpha t)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$\tilde{g}(t) = b \exp(\beta t)$

$\rightsquigarrow$ $f(t) = \exp(\alpha t) \cdot a + \exp(\beta t) \cdot b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

löst das Problem. Durch Wahl von a und b kann man $f(0)$ sowie $f'(0)$ beliebig vorgeben (Anfangswerte)

Beachte: $\alpha, \beta < 0 \rightsquigarrow$ Starke Dämpfung

(klingt exponentiell ab)

2. Fall $r^2 < \omega^2$ Genau wie eben, aber

jetzt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$

$\beta = \beta_0 + i\beta_1$

$$f(t) = \exp(\alpha t)\cdot a + \exp(\beta t)\cdot b \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

Physikalisch sinnvoll ist der Realteil,

$$Re(f(t)) = \exp(\alpha_0 t)\cos(\alpha_1 t)\cdot a + \exp(\beta_0 t)\cos(\beta_1 t)\, b$$

denn $\exp((\alpha_0 + i\alpha_1)t) = \exp(\alpha_0 t)(\cos(\alpha_1 t) + i\cdot\sin(\alpha_1 t))$

Eulers Formel

$\rightsquigarrow$ Schwingung

3. Fall $r^2 = \omega^2$, $\alpha = \beta = -r$, $\chi_A = (T+r)^2$

Da $A \neq -r\cdot \mathbb{1}_2$ ist $\mu_A \neq T+r$, also

gibt es $S \in GL_2(\mathbb{R})$ mit

$$S A S^{-1} = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \qquad \text{(Jordan-Normalform)}$$

$\tilde{g}' = -r\tilde{g} \rightsquigarrow \tilde{g}(t) = \exp(-rt)$

$\tilde{f}' = -r\tilde{f} + \tilde{g} \underset{\text{raten}}{\rightsquigarrow} \tilde{f}(t) = t\cdot\exp(-rt)$

$$f(t) = a\exp(-rt) + b\cdot t\cdot\exp(-rt) \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

sogenannt "Kriech-Fall" $\square$

Eine wichtige Voraussetzung im Theorem §5.23 zur Jordan-Normalform war, dass $\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{n} (T - \alpha_i)$ gilt. Für $K = \mathbb{R}$ kann man das nicht immer erwarten,

$$\mu_A = \underbrace{T^2 + 1}_{\text{irreduzibel in } \mathbb{R}[T]} \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

26. <u>Def</u> Ein Körper K heißt <u>algebraisch abgeschlossen</u>, wenn jedes Polynom $p \in K[T]$ mit Grad $\deg(p) \geq 1$ (mindestens) eine Nullstelle hat, d.h. $p(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in K$.

<u>Lemma</u> Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, dann hat jedes irreduzible Polynom $p \in K[T]$ Grad 1, $p = a(T - \alpha)$ $\begin{matrix} a \in K^* \\ \alpha \in K \end{matrix}$

<u>Beweis</u> Sei $p \in K[T]$ irreduzibel, $\deg(p) \geq 1$. Sei $\alpha \in K$ mit $p(\alpha) = 0$. Mit §5.17 folgt $(T - \alpha) \mid p$. Weil p irreduzibel ist, folgt $p = a(T - \alpha)$ für ein $a \in K^*$

$\square$

27. Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)

Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis Notation: Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $x,y\in\mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{Re}(z) = x$ $\quad \bar{z} = x-iy$

$\rightsquigarrow$ $|z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(\bar{z}w)$ für alle $z,w\in\mathbb{C}$

$|zw| = |z|\cdot|w|$

Sei jetzt $p\in\mathbb{C}[T]$, $\deg(p) = n \geq 1$

$p = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$. Es folgt

$$|p(z)| \geq |a_n|\cdot|z|^n - (|a_{n-1}|\cdot|z|^{n-1} + \dots + |a_0|)$$

Sei $\alpha = \inf\{\,|p(z)| \mid z\in\mathbb{C}\}$

Die Ungleichung oben zeigt: es gibt ein $s\geq 0$ so, dass $|p(z)| \geq 2\cdot\alpha$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|\geq s$. Die Menge $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq s\} = K$ ist kompakt. Da $z\longmapsto |p(z)|$ stetig ist, gibt es $z_0\in K$ mit $|p(z_0)| = \alpha$.

Zu zeigen ist $\alpha = 0$. Wir dürfen annehmen, dass $z_0 = 0$ gilt, sonst betrachte das Polynom $a_0 + a_1(T-z_0) + \dots + a_n(T-z_0)^n$

Also OE $|p(0)| = \alpha$ Minimum.

Jedes $z \in \mathbb{C}$ läßt sich schreiben als

$$z = \underbrace{w}_{\text{Drehung}} \cdot \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \quad , \text{mit } |w| = 1 \text{ und } r \in \mathbb{R},\ r = |z|$$

$|p(z)|^2 - |p(0)|^2 \geq 0$, $p = a_0 + q \cdot T^k$ mit

$p(0) = a_0$ $\quad q \in \mathbb{C}[T]$, $q(0) \neq 0$

$$|p(z)|^2 - |p(0)|^2 = |a_0 + (w \cdot r)^k q(w \cdot r)|^2 - |a_0|^2$$

$$= \cancel{|a_0|^2} + r^{2k} |q(w \cdot r)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{a}_0\, (w \cdot r) q(wr)\right) - \cancel{|a_0|^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad r^k |q(w \cdot r)|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}_0 \cdot w^k \cdot q(wr)) \geq 0$$

Grenzwert $r \to 0$ $\qquad 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}_0 \cdot w^k \cdot q(0)) \geq 0$

Das gilt für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$!

$\bar{a}_0 \cdot q(0) = u \cdot s$ $\quad$ mit $|u| = 1$ $\quad u \in \mathbb{C}$
$\qquad s \in \mathbb{R}$ $\quad s \geq 0$

Wähle w so, dass $w^k u = -1$, d.h. $w^k = -1/u$,
das geht nach § 5.24. Es folgt

$$\mathrm{Re}(\bar{a}_0\, w^k q(0)) = -s \geq 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0$$

$\Rightarrow \bar{a}_0\, q(0) = 0$. Da $q(0) \neq 0$ folgt $\bar{a}_0 = 0$

also $a_0 = 0 = p(0)$ $\qquad \square$

28. <u>Folgerung</u> Ist $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$, so gibt es eine Matrix $S \in GL_d\mathbb{C}$ mit

$$SAS^{-1} = X = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_n \end{pmatrix}$$

$$X_i \in K^{d_i \times d_i} \qquad X_i = \begin{pmatrix} J(\alpha_i, d_{i,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\alpha_i, d_{i,k_i}) \end{pmatrix}$$

wobei $\mu_A = \prod_{i=1}^{n} (T-\alpha_i)^{m_i}$ $\qquad \alpha_i \in \mathbb{C}$

$\qquad \alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (T-\alpha_i)^{d_i}$$

<u>Beweis</u> Jedes irreduzible Polynom in $\mathbb{C}[T]$ hat Grad 1, also gilt $\mu_A = \prod_{i=1}^{n} (T-\alpha_i)^{m_i}$ für geeignete komplexe Zahlen α_i, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. $\square$

29. <u>Abschließende Bemerkung</u> In §3.22 haben wir bewiesen: ist $A \in K^{d\times d}$, so gibt es $L \in GL_d K$, $R \in GL_d K$ mit

$$LAR = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

In diesem Kapitel haben wir gezeigt: wenn alle irreduziblen Faktoren von μ_A, für $A \in K^{d\times d}$, Grad 1 haben, so gibt es $S \in GL_d K$ so, dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{X_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{X_m} \end{pmatrix},$$ wie in §5.22.