§3 Erzeugendensysteme, Basen und Matrizen

Es sei V ein K-Vektorraum. Weiter seien $v_1, \ldots, v_s \in V$ Vektoren und $a_1, \ldots, a_s \in K$ Skalare. Dann nennt man den Vektor

$$v = v_1 a_1 + \ldots + v_s a_s$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots, v_s$.

Satz §1.7 besagt: ist $X \subseteq V$ eine Teilmenge, dann besteht das Erzeugnis $\langle X \rangle$ aus allen Linearkombinationen von Vektoren aus $X \cup \{0\}$. Wenn gilt $\langle X \rangle = V$, dann heißt X *Erzeugendensystem* für V. Im allgemeinen gibt es viele verschiedene Erzeugendensysteme für einen gegebenen Vektorraum. Es gilt zum Beispiel immer $V = \langle V \rangle = \langle V - \{0\} \rangle$.

Wir betrachten in diesem Kapitel *minimale* Erzeugendensysteme.

Was heißt "minimal" hier?

1. <u>Def</u> Sei M eine Menge und sei P eine Menge von Teilmengen von M, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$. Eine Menge $A \in P$ heißt

<u>minimal</u> (in P), wenn es kein $B \in P$ gibt mit $B \subsetneq A$

maximal (in P) wenn es kein $B \in P$ gibt mit $A \subsetneq B$.

<u>Bsp</u> In $P = \mathcal{P}(M)$ ist $\emptyset$ minimal und M ist maximal.

Ist V ein Vektorraum, so heißt ein Erzeugendensystem $E \subseteq V$ <u>minimales Erzeugendensystem</u>, wenn E minimal in der Menge aller Erzeugendensysteme von V ist, wenn es also kein Erzeugendensystem $F \subseteq V$ gibt mit $F \subsetneq E$.

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^2$ $E = \{(0,1), (1,0)\}$

Es gilt $(x,y) = (1,0)x + (0,1)y$, also ist E ein Erzeugendensystem. Offensichtlich gilt

$$\langle \{(0,1)\} \rangle = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$$
$$\langle \{(1,0)\} \rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$$
$$\langle \emptyset \rangle = \{(0,0)\}$$

also ist E ein minimales Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$

Dagegen ist $F = \{(1,0), (1,1), (1,3)\}$ nicht minimal: wegen

$$(1,0)\cdot(-2) + (1,1)\cdot 3 = (1,1)$$

ist auch $F - \{(1,1)\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^2$.

<u>Beobachtung</u> Ist $X \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und ist $X \subseteq Y \subseteq V$, so ist auch Y ein Erzeugendensystem.

2. <u>Def</u> Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt <u>linear abhängig</u>, wenn es Vektoren $v_1, \ldots, v_s \in X$ gibt, mit $x_j \neq x_i$ für $i \neq j$, und Skalare $a_1, \ldots, a_s \in K$, so dass gilt:

(i) $0 = v_1 a_1 + \ldots + v_s a_s$

(ii) es gibt ein j mit $a_j \neq 0$

<u>Beispiel</u>

- $X = \{0\}$ ist linear abhängig, denn $0 = 0 \cdot 1$ $\quad (v_1 = 0,\ a_1 = 1)$
- Die Menge $F = \{(1,0), (1,1), (1,3)\}$ ist linear abhängig, denn

$$(0,0) = (1,0)\cdot(-2) + (1,1)\cdot 3 + (1,3)(-1)$$

Ist $X \subseteq V$ nicht linear abhängig, dann heißt X <u>linear unabhängig</u>. Das bedeutet folgendes: ist $v_1, \ldots, v_s \in X$, $a_1, \ldots, a_s \in K$, $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, und gilt $0 = v_1 a_1 + \ldots + v_s a_s$, so folgt daraus $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$.

Beispiele • $\emptyset \subseteq V$ ist linear unabhängig Ü A

• wenn gilt $0 \in X \subseteq V$, dann ist X linear abhängig

• $\{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig:

$(1,0)x + (0,1)y = (0,0) \iff x = y = 0$ #

Beobachtung Ist $X \subseteq V$ linear unabhängig, so ist auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ linear unabhängig.

3. Def Sei V ein K-Vektorraum. Ein Erzeugendensystem $B \subseteq V$, das linear unabhängig ist, heißt Basis von V.

Beispiele (a) $\emptyset$ ist Basis von $V = \{0\}$

(b) $\{(1,0),(0,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$

Satz Sei V ein K-Vektorraum und sei $B \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) B ist ein Basis von V

(ii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V

(iii) B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $B \subseteq V$ ein Basis.(*)
Sei $b \in B$ und $B' = B - \{b\}$. Zeige $\langle B' \rangle \neq V$.
Es gilt jedenfalls $b \neq 0$, weil B linear unabhängig ist. Angenommen, $\langle B' \rangle = V$. Wegen $V \neq 0$ folgt $B' \neq \emptyset$ und es gibt $b_1, \dots, b_s \in B'$, sowie $a_1, \dots, a_s \in K$ mit

$$b = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s$$

Wir können annehmen, dass $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$, und $b \neq b_i$ für $1 \leq i, j \leq s$. Es folgt

$$0 = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s + b(-1)$$

ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von B.
Also kann keine echte Teilmenge $A \subsetneq B$ den Vektorraum V erzeugen. $\square$

(*) Wenn $B = \emptyset$, dann ist B minimal.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $B \subseteq V$ minimales Erzeugendensystem.

1. Schritt B ist linear unabhängig. Sonst gäbe es $b_1, \dots, b_s \in B$, $b_i \neq b_j$ und $a_i \in K$, $j, i = 1, \dots s$ mit $0 = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s$ und $a_k \neq 0$ für ein k. Ohne Einschränkung $k = 1$, also

$b_1 = -(b_2 a_2 a_1^{-1} + \dots + b_s a_s a_1^{-1})$. Es folgt

$b_1 \in \langle B - \{b_1\} \rangle$, also $V = \langle B - \{b_1\} \rangle$, ein Widerspruch. Folglich ist B linear unabhängig.

2. Schritt B ist maximale linear unabhängige Menge.

Sei $B \subsetneq B' \subseteq V$. Dann gibt es $v \in B' - B$. Wenn B' linear unabhängig ist, ist $v \neq 0$. Es gibt $b_1, \dots, b_s \in B$, $a_1, \dots, a_s \in K$ mit

$$v = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s$$

OE $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$. Es folgt

$$0 = b_1 a_1 + \dots + b_s a_s + b(-1),$$

also ist B' linear abhängig. $\square$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $B \subseteq V$ maximale linear unabhängige Menge. Zeige, dass B Erzeugendensystem ist.

Angenommen, $V \neq \langle B \rangle$. Dann gibt es $v \in V - \langle B \rangle$.

Beh $\{v\} \cup B$ ist linear unabhängig. Denn sonst gäbe es $w_1, \ldots, w_s \in B \cup \{v\}$ mit $w_i \neq w_j$ für $i \neq j$, $a_1, \ldots, a_s \in K$, $a_k \neq 0$ für ein k, und

$$0 = w_1 a_1 + \ldots + w_s a_s$$

Wäre $w_1, \ldots, w_s \in B$, so wäre B schon linear abhängig. Also gilt $v = w_l$ für ein l. Wäre $a_l = 0$, so wäre wieder B linear abhängig also

$a_l \neq 0$, $v = -(w_1 a_1 a_l^{-1} \ldots w_{l-1} a_{l-1} a_l^{-1} + w_{l+1} a_{l+1} a_l^{-1} + \ldots)$

$\Rightarrow v \in \langle B \rangle$, ein Widerspruch. Also gilt $V = \langle B \rangle$ $\square$

Wir werden sehen, dass manche Rechnungen in der linearen Algebra einfacher werden, wenn man mit Basen arbeitet (manches wird dadurch aber auch unübersichtlicher). Zuerst klären wir, dass es in jedem Vektorraum Basen gibt. Dazu brauchen wir ein Hilfsmittel der Mengenlehre (vgl. Kapitel 0), das <u>Lemma von Zorn</u>.

4. Das Lemma von Zorn. Es sei M eine Menge und P eine Menge von Teilmengen von M, das heißt $P \subseteq \mathcal{P}(M)$. Erinnerung: eine Menge $A \in P$ heißt maximal in P, wenn es kein $B \in P$ gibt mit $A \subsetneq B$.

Eine Teilmenge $G \subseteq P$ heißt Kette, wenn für alle $A, B \in G$ gilt: $A \subseteq B$ oder $A \supseteq B$ („es geht immer bergauf"). Ist G eine Kette und ist $B \in P$, dann heißt B obere Schranke von G, wenn $A \subseteq B$ für alle $A \in G$ gilt.

Lemma (Max Zorn 1935, Felix Hausdorff 1914)
Sei M eine Menge, sei $\emptyset \neq P \subseteq \mathcal{P}(M)$. Wenn jede Kette $G \subseteq P$ eine obere Schranke hat, dann gibt es in P maximale Elemente.

Zorns Lemma beweist man mit dem Auswahlaxiom. Wir machen das später, zuerst benutzen wir es, um die Existenz von Basen zu zeigen.

5. Das Ergänzungslemma

Es sei V ein K-Vektorraum und es sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem. Weiter sei $T \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Dann gibt es eine Menge $S \subseteq E - T$ so, dass $T \cup S$ eine Basis von V ist.

Beweis Sei P die Menge aller Teilmengen $X \subseteq V$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $X \subseteq T \cup E$
(ii) $T \subseteq X$
(iii) X ist linear unabhängig.

(Es gilt also $T \in P$).

Behauptung 1) in P gibt es maximale Elemente.

Ist $G \subseteq P$ eine Kette, so betrachte $\hat{G} = \bigcup G$. Da für jedes $X \in G$ gilt $T \subseteq X \subseteq T \cup E$, folgt $T \subseteq \hat{G} \subseteq T \cup E$. Weiter ist $\hat{G}$ linear unabhängig. Denn ist $v_1, \dots, v_s \in \hat{G}$, $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ und gilt $v_1 a_1 + \dots + v_s a_s = 0$, so gibt es $A_i \in G$ mit $v_i \in A_i$. Da G Kette ist, können wir die Indizes i so ändern, dass gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_s, \text{ also } v_1, \dots, v_s \in A_s$$

Aber A_s war nach Voraussetzung linear unabhängig. Es folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$. Damit ist $\hat{G}$ linear unabhängig, also $\hat{G} \in P$. Für jedes $A \in G'$ gilt $A \subseteq \hat{G}$, also ist $\hat{G}$ obere Schranke von G. $\square$

Nach Zorns Lemma §3.4 gibt es in P (mindestens) ein maximales Element $\mathcal{B}$.

Behauptung 2) $\mathcal{B}$ ist eine Basis.

Weil $B \in P$ ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig, wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist. Wenn das falsch wäre, gäbe es einen Vektor $v \in E - \langle \mathcal{B} \rangle$, (denn $V = \langle E \rangle$; wenn $E \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, so $\langle \mathcal{B} \rangle = V$).

Beh: Dann wäre $\{v\} \cup \mathcal{B}$ linear unabhängig.

Denn: Sei $w_1, \dots, w_s \in \{v\} \cup \mathcal{B}$, $a_1, \dots, a_s \in K$ mit $w_1 a_1 + \dots + w_s a_s = 0$ und $w_i \neq w_j$ für $i \neq j$.

Fall α: $v \notin \{w_1, \dots, w_s\}$. Dann $w_1, \dots, w_s \in \mathcal{B}$, also

$$a_1 = \dots = a_s = 0.$$

Fall β: $v \in \{w_1, \dots, w_s\}$, ohne Einschränkung $v = w_1$.

Wenn $a_1 = 0$, so $0 = w_2 a_2 + \dots + w_s a_2$ und damit $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$ wie in (α)

Wenn $a_1 \neq 0$, dann $v = (w_2 a_2 + \dots + w_s a_s) a_1^{-1}$, aber $v \notin \langle B \rangle$ ↯.

Also gilt in jedem Fall $a_1 = \dots = a_s = 0$ und damit ist $B \cup \{v\}$ linear unabhängig. Dann haben wir aber $T \subseteq B \subsetneq B \cup \{v\} \subseteq T \cup E$, ein Widerspruch zur Maximalität von B.

Also gibt es kein $v \in E - \langle B \rangle$, also $\langle B \rangle = V$.

$\square$

<u>Korollar</u> Jeder Vektorraum V hat eine Basis.

Beweis: Wende das Ergänzungslemma an auf $T = \emptyset$ und $E = V$. $\square$

6. <u>Definition</u> Ein K-Vektorraum V hat <u>endliche Dimension</u>, wenn er (mindestens) eine endliche Basis hat.

<u>Lemma</u> Sei V ein K-Vektorraum mit einer endlichen Basis B. Für jede linear unabhängige Menge $T \subseteq V$ gilt dann

$$\# T \leq \# B$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, dass T endlich ist. Sei $k = \# T$ und $m = \# B$. Wir beweisen mit Induktion nach k: es gibt l Elemente $w_1, \dots, w_l \in B$ so dass $T \cup \{w_1, \dots, w_l\}$ eine Basis ist und $l \leq m - k$.

$k = 0$: Dann ist $T = \emptyset$, die Behauptung folgt.

Induktionsschritt: Sei $T = \{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}\}$ und $\# T = k+1$. Die Behauptung gilt für k. Also gibt es $w_1, \dots, w_l \in B$ so, dass $l \leq m - k$ und $E = \{t_1, \dots, t_k, w_1, \dots, w_l\}$ ist Basis.

Nach dem Ergänzungslemma §3.5 gibt es eine Basis B' mit $\{t_1, \dots, t_{k+1}\} \subseteq B' \subseteq \{t_1, \dots, t_{k+1}, w_1, \dots, w_l\}$

Da $t_{k+1} \in \langle \{t_1, \dots, t_k, w_1, \dots, w_l\} \rangle$, ist $B' \neq \{t_1, \dots, t_{k+1}, w_1, \dots, w_l\}$, also $\# B' \leq m$, also $k+1 \leq m$. $\square$

Damit ist für alle endlichen linear unabhängigen Mengen $T \subseteq V$ gezeigt, dass $\# T \leq \# \mathcal{B}$ gilt. #

Wäre aber $T \subseteq V$ eine unendliche linear unabhängige Menge, so hätte T eine Teilmenge $T_0 \subseteq T$ mit $\# T_0 > \# \mathcal{B}$ (weil T unendlich ist) und T_0 wäre linear unabhängig (weil T linear unabhängig ist). Das kann nicht sein nach den vorigen Überlegungen. $\square$

<u>Korollar</u> In einem endlichdimensionalen Vektorraum V haben alle Basen die gleiche Länge.

<u>Beweis</u> Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V, so gilt $\# \mathcal{B} \leq \# \mathcal{B}' \leq \# \mathcal{B}$, also $\# \mathcal{B} = \# \mathcal{B}'$ $\square$

Diese gemeinsame Länge aller Basen von V nennt man die <u>Dimension</u> von V,

$$\dim(V) = \# \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}$ Basis von V.

Bemerkung Es gibt Vektorräume, die keine endliche Basis haben, z.B. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Solche Vektorräume haben unendliche Dimension. Man kann auch dort zeigen, dass alle Basen die gleiche unendliche Länge haben.

7. Dimensionsformeln

Satz A Sei W ein Vektorraum und $U \subseteq W$ ein Unterraum. Wenn W endliche Dimension hat, so haben auch W/U und U endliche Dimension und es gilt

$$\dim(W) = \dim(U) + \dim(W/U)$$

Bew.: Sei B eine Basis von U. Nach dem Lemma in §3.6 gilt $\# B \leq \dim(W)$, weil $B \subseteq U$ linear unabhängig ist. Schreibe $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ mit $r = \dim(U)$. Mit dem Ergänzungslemma finden wir $v_1, \dots, v_s \in W$ so, dass $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ eine Basis von W ist und $\dim(W) = r+s$. Sei $V = \langle\{v_1, \dots, v_s\}\rangle$, dann gilt $\dim(V) = s$ (denn $\{v_1, \dots, v_s\}$ ist Basis von V).

Betrachte

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\pi"] & W/U \\ V \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt $\ker(\varphi) = \ker(\pi) \cap V = U \cap V$ (§2.12)

Ist $w \in U \cap V$, so gilt $w = u_1 a_1 + \dots + u_r a_r = v_1 b_1 + \dots + v_s b_s$ für geeignete Skalare a_i, b_j. Damit

$$0 = u_1 a_1 + \dots + u_r a_r + v_1(-b_1) + \dots + v_s(-b_s)$$

also $a_1 = a_2 = \dots = a_r = b_1 = \dots = b_s = 0$ (da $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ linear unabhängig ist)

also $U \cap V = \{0\}$, d.h. φ ist injektiv. Es gilt

$$\pi(u_1 a_1 + \dots + u_r a_r + v_1 b_1 + \dots + v_s b_s) = \pi(v_1 b_1 + \dots + v_s b_s)$$

also ist φ surjektiv, d.h. $V \xrightarrow{\varphi} W/U$ ist ein Isomorphismus. Es folgt

$$\dim(W) = r+s = \dim(U) + \dim(V) = \dim(U) + \dim(W/U) \ \square$$

Erinnerung: ist $\varphi: V \to W$ linear, so ist der Kokern von φ definiert als

$$\operatorname{cok}(\varphi) = W/\varphi(V)$$

Theorem Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

(i) Wenn V endlichdimensional ist, dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\varphi(V)) + \dim(\ker(\varphi))$$

(ii) Wenn W endlichdimensional ist, dann gilt

$$\dim(W) = \dim(\varphi(V)) + \dim(\operatorname{cok}(\varphi))$$

Beweis (i) Nach dem Homomorphiesatz § 2.13 gilt

$\varphi(V) \cong V/_{\ker(\varphi)}$, wende darauf den Satz an.

(ii) Es gilt $\operatorname{cok}(\varphi) = W/_{\varphi(V)}$, wende darauf den Satz an. $\square$

Korollar A Sei $\varphi: V \to W$ linear und injektiv. Wenn W endliche Dimension hat, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$. Wenn dann gild $\dim(V) = \dim(W)$, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis Da φ injektiv ist, gilt $\varphi(V) \cong V$, also $\dim(W) = \dim(V) + \dim(\operatorname{cok}(\varphi))$.
Wenn $\dim(W) = \dim(V)$, so ist $\dim(\operatorname{cok}(\varphi)) = 0$, also hat $\operatorname{cok}(\varphi)$ genau ein Element, $\varphi(V) = W$ $\square$

Korollar B   Sei $\varphi: V \to W$ linear und surjektiv. Wenn W endliche Dimension hat, so gilt $\dim(W) \le \dim(V)$. Wenn dann gilt $\dim(W) = \dim(V)$, so ist φ ein Isomorphismus.

Beweis   Es gilt $\varphi(V) = W$, also

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(\ker(\varphi))$$

Wenn $\dim(V) = \dim(W)$, so folgt, dass $\ker(\varphi)$ 0-dimensional ist, also aus genau einem Element besteht $\square$

Wir haben hierbei mal benutzt: es gilt

$\dim(V) = 0$ genau dann, wenn $V = \{0\}$ (ÜA).

Die Dimensionsformeln und die hieraus Korollare sind sehr nützlich bei Rechnungen!

(Die Dimensionsformeln (aber nicht die Korollare) gelten auch für Vektorräume mit unendlichen Basen, wenn man mit unendlichen Kardinalzahlen rechnet / rechnen kann.)

$\boxed{\text{ÜA}}$ Es gilt für endlich dimensionale Vektorräume U, V:

$$\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$$

#

<u>Erinnerung:</u> Ist M eine (nicht leere) Menge und K ein Körper, so bezeichnet K^M den K-Vektorraum aller Abbildungen $M \to K$.

Wir definieren $K^{\emptyset} = \{0\} = K^0$

Wenn M endlich ist, $M = \{m_1, \dots, m_n\}$, dann sind die Elemente von K^M Tupel $(a_{m_1}, \dots, a_{m_n})$ mit $a_{m_i} \in K$, vgl § 0.11.

Die Abbildung

$$(a_1, \dots, a_n) \longrightarrow (a_{m_1}, \dots, a_{m_n})$$

$$a_i \longmapsto a_{m_i}$$

ist offensichtlich ein Isomorphismus

$$K^n \cong K^M \qquad n = \# M$$

und mit unserer Konvention stimmt das auch für $M = \emptyset$ und $n = 0$.

8. Basen und Koordinaten

Lemma Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $B \subseteq V$ eine Basis. Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Skalare $(v_b)_{b \in B}$, so dass gilt

$$v = \sum_{b \in B} b v_b$$

Bew.: Da B ein Erzeugendensystem für V ist, existieren jedenfalls solche Skalare, vgl. §2.7. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Angenommen, es gilt

$$\sum_{b \in B} b v_b = \sum_{b \in B} b v_b' \qquad \text{für Skalare } v_b, v_b' \in K.$$

Es folgt $\sum_{b \in B} b(v_b - v_b') = 0$, da B linear unabhängig ist, folgt $v_b - v_b' = 0$ für alle $b \in B$.

$\square$

Die Skalare $(v_b)_{b \in B}$ nennt man Koeffizienten oder Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis B.

Jeder Vektor $v \in V$ bestimmt also ein eindeutiges Tupel $(v_b)_{b\in B}$ von Koeffizienten: Wir ordnen jedem Vektor so ein Element von K^B zu.

<u>Satz</u> Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis B. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : V \to K^B, \quad \varphi(v) = (v_b)_{b\in B}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

<u>Beweis</u> Ist $(v_b)_{b\in B}$ ein Tupel von Skalaren, so setze $\psi\big((v_b)_{b\in B}\big) = \sum_{b\in B} b v_b \in V$. Es gilt

$$\varphi\circ\psi\big((v_b)_{b\in B}\big) = (v_b)_{b\in B}$$

$$\psi\circ\varphi(v) = v$$

also ist φ bijektiv mit Umkehrabbildung ψ.

Es gilt für $v, w \in V$

$$\varphi(v+w) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b v_b + \sum_{b\in B} b w_b\Big) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b(v_b+w_b)\Big)$$

$$= (v_b+w_b)_{b\in B} = (v_b)_{b\in B} + (w_b)_{b\in B} \quad (\text{vgl } \S 2.2)$$

$$= \varphi(v) + \varphi(w)$$

und für $a \in K$, $v \in V$

$$\varphi(v \cdot a) = \varphi\Big(\sum_{b\in B} b(v_b a)\Big) = (v_b \cdot a)_{b \in B} = \big((v_b)_{b\in B}\big) \cdot a$$

$$= \varphi(v) \cdot a \qquad \square$$

9. Korollar (Hauptsatz über endlich dimensionale Vektorräume)

Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, so haben wir einen Isomorphismus

$$V \cong K^n$$

Beweis Wir haben Isomorphien

$$V \xrightarrow{\cong} K^{(B)} \xrightarrow{\cong} K^{\# B}$$

$B \subseteq V$ Basis mit $\# B = n$ $\square$

Lineare Abbildungen lassen sich gut mit Basen beschreiben.

10. Satz Seien V und W K-Vektorräume, sei V endlich dimensional mit Basis $B \subseteq V$.

(i) Zu jeder Abbildung $\varphi : B \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\hat{\varphi} : V \to W$ mit $\hat{\varphi}(b) = \varphi(b)$ für alle $b \in B$

(ii) Jede lineare Abbildung $V \to W$ erhält man auf diese Weise

(iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} W^B &\longrightarrow L(V,W) \\ \varphi &\longmapsto \hat{\varphi} \end{aligned}$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis Sei $\varphi \in W^B$, also $\varphi : B \to W$. Wir definieren $\hat{\varphi}\left(\sum_{b\in B} b v_b\right) = \sum_{b \in B} \varphi(b) v_b$, $\hat{\varphi} : V \to W$

Es gilt

$$\hat{\varphi}\Big(\underbrace{\sum_{b\in B} b v_b}_{=v} + \underbrace{\sum_{b \in B} b w_b}_{=w}\Big) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{b\in B} b(v_b + w_b)\Big) = \sum_{b\in B} \varphi(b)(v_b + w_b)$$

$$= \sum_{b\in B} \varphi(b) v_b + \sum_{b\in B} \varphi(b) w_b = \hat{\varphi}(v) + \hat{\varphi}(w)$$

$$\hat{\varphi}\Big(\underbrace{\Big(\sum_{b\in B} b v_b\Big)}_{=v} a\Big) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{b\in B} b(v_b a)\Big) = \sum_{b\in B} \varphi(b)(v_b a)$$

$= \hat{\varphi}(v) a$ also ist $\hat{\varphi} \in L(V,W)$

Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in W^B$. Wenn gilt $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$, so gilt $\varphi_1(b) = \hat{\varphi}_1(b) = \hat{\varphi}_2(b) = \varphi_2(b)$ für alle $b \in B$, also $\varphi_1 = \varphi_2$, d.h. die Abbildung $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ ist injektiv. Ist $\psi : V \to W$ linear, so setze $\varphi(b) = \psi(b)$ für $b \in B$. Es folgt wegen der Linearität von ψ, dass $\hat{\varphi} = \psi$, also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} W^B &\longrightarrow L(V,W) \\ \varphi &\longmapsto \hat{\varphi} \end{aligned}$$

bijektiv.

Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in W^B$ und $a \in K$, $v \in V$. Dann gilt

$\widehat{(\varphi_1 \cdot a)}(v) = (\hat{\varphi}_1 \cdot a)(v)$ (Einsetzen) und

$\widehat{(\varphi_1 + \varphi_2)}(v) = (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)(v)$ (Einsetzen), also ist die Abbildung $W^B \to L(V,W)$ linear. Damit ist (iii) gezeigt. Aber (i) und (ii) folgen direkt aus (iii). $\square$

Wir verfeinern diesen Isomorphismus $W^B \cong L(V,W)$, wenn W auch eine endliche Basis $C \subseteq W$ hat wie folgt.

11. Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen K-Vektorräumen mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$. Für $b \in B$ betrachte die Koordinaten von $\varphi(b)$,

$$\varphi(b) = \sum_{c \in C} c \cdot \varphi(b)_c$$

Wir setzen $\varphi_{c,b} = \varphi(b)_c$. Dann ist

$$(\varphi_{c,b})_{(c,b) \in C \times B} = (\varphi_{c,b})_{\substack{c \in C \\ b \in B}} \in K^{C \times B}$$

ein Tupel mit Indexmenge $C \times B$. Für $v \in V$, $v = \sum_{b \in B} b v_b$ gilt dann

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{b \in B} b \cdot v_b\Big) = \sum_{b \in B} \varphi(b) v_b$$

$$= \sum_{b \in B} \sum_{c \in C} c \cdot \varphi_{c,b} \cdot v_b$$

Skalare

#

Sind allgemein B, C endliche Mengen, so heißen die Elemente des K-Vektorraums

$K^{C \times B}$ **Matrizen** (mit Indexmenge $C \times B$).

Ist $B = \{1, \dots, m\}$ und $C = \{1, \dots, n\}$, schreibt man auch $K^{C \times B} = K^{n \times m}$. Die Elemente von $K^{n \times m}$ schreibt man als rechteckige Zahlenschemen, $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,m} \\ \vdots & & \\ \varphi_{n,1} & \cdots & \varphi_{n,m} \end{pmatrix}$$

Ist $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\# B = m$ und
$C = \{c_1, \dots, c_n\}$, $\# C = n$, so gilt

$$K^{C \times B} \cong K^{n \times m} \quad \text{via} \quad \varphi_{ij} = \varphi_{c_i b_j}$$

$$(\varphi_{c,b})_{\substack{c \in C \\ b \in B}} \longmapsto (\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

(Isomorphismus von $n \cdot m$-dimensionalen K-Vektorräumen)

12. Definition + Satz Seien V, W endlich-dimensional K-Vektorräume mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$. Sei $\varphi : V \to W$ linear. Wir definieren eine Matrix $_C M_B(\varphi) \in K^{C \times B}$ durch

$$_C M_B(\varphi) = \left(\varphi_{c,b}\right)_{\substack{c \in C \\ b \in B}}$$

wobei $\varphi(b) = \sum_{c \in C} c\, \varphi_{c,b}$ die Einträge $\varphi_{c,b}$ bestimmt.

Satz Die Abbildung

$$\begin{aligned} L(V,W) &\longrightarrow K^{B \times C} \\ \varphi &\longmapsto {}_C M_B(\varphi) \end{aligned}$$

ist ein linearer Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis (a) Die Abbildung ist injektiv.

Ist $_C M_B(\varphi) = {}_C M_B(\psi)$ für $\varphi, \psi \in L(V,W)$, so folgt $\varphi(b) = \psi(b)$ für alle $b \in B$, also auch $\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{b \in B} b v_b\right) = \sum_{b \in B} \varphi(b) v_b = \sum_{b \in B} \psi(b) v_b$

$$\psi\left(\sum_{b \in B} b v_b\right) = \psi(v)$$

(b) Die Abbildung ist surjektiv

Sei $(\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}} \in K^{C\times B}$ eine Matrix.

Definiere $\psi : V \to W$ durch

$$\psi\Big(\sum_{b\in B} b\, v_b\Big) = \sum_{c\in C}\sum_{b\in B} c\cdot \varphi_{c,b}\cdot v_b$$

Dann ist ψ linear (leichte Rechnung, vgl §3.10)

und es gilt ${}_C M_B(\psi) = (\varphi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}}$

(c) Die Abbildung ist linear

Sei $\varphi, \psi \in L(V,W)$ und $a \in K$. Für $v \in V$ beliebig gilt

$$(\varphi+\psi)(v) = \varphi(v)+\psi(v) = \sum_{\substack{c\in C\\ b\in B}} c\,\varphi_{c,b}\, v_b + \sum_{\substack{c\in C\\ b\in B}} c\,\psi_{c,b}\, v_b$$

$$= \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} c\cdot(\varphi_{c,b}+\psi_{c,b})\, v_b$$

also $(\varphi+\psi)_{c,b} = \varphi_{c,b}+\psi_{c,b}$

$$(\varphi\cdot a)(v) = \varphi(v)\cdot a = \sum_{\substack{c\in C\\ b\in B}} c\,\varphi_{c,b}\cdot v_b\cdot a = \sum_{\substack{c\in C\\ b\in B}} c(\varphi_{c,b}\cdot a)\, v_b$$

also $(\varphi\cdot a)_{c,b} = \varphi_{c,b}\cdot a$ $\square$

(*) Man nennt ${}_C M_B(\varphi)$ auch <u>Begleitmatrix</u> der linearen Abbildung $\varphi: V \to W$, bezüglich der Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$.

Beachte: wegen $K^{C \times B} \cong K^{n \times m}$ für $\# B = m$, $\# C = n$ kann man <u>jede</u> Matrix in $K^{n \times m}$ als Begleitmatrix einer linearen Abbildung lesen. Zum Beispiel als Abbildung

$$K^m \to K^n, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{ji} v_i$$

Korollar Sind V, W endlichdimensionale K-Vektorräume, so gilt

$$\dim(L(V,W)) = \dim(V)\cdot\dim(W) \qquad \square$$

13. Explizite Rechnungen

Sei $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ und $C = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$

Schreibe $\varphi_{ij} = \varphi_{c_i b_j}$ und für $v \in V$ mit Koordinaten $(v_b)_{b\in B}$ $\quad v_j = v_{b_j}$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}\varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,m}\\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n,1} & \cdots & \varphi_{n,m}\end{pmatrix}}^{m}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

"Spaltenvektor"

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij} v_j = w_i$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\ 32\end{pmatrix}$$

Die zugehörige lineare Abbildung $\varphi: K^3 \to K^2$

ist gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y\\x+4y+6z\end{pmatrix}$$

14. Verknüpfungen von linearen Abbildungen und Multiplikation von Matrizen

Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorraum und seien

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch $\psi\circ\varphi: U \to W$ linear. Die Komposition von Abbildungen ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} L(V,W)\times L(U,V) &\longrightarrow L(U,W)\\ (\psi,\varphi) &\longmapsto \psi\circ\varphi \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist nicht linear, sondern bilinear: es gilt für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(U,V)$
$\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(V,W)$
$s, s \in K$

$$\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \psi\circ\varphi_1 + \psi\circ\varphi_2$$

$$(\psi_1+\psi_2)\circ\varphi = \psi_1\circ\varphi + \psi_2\circ\varphi$$

$$(\psi\cdot s)\circ\varphi = (\psi\circ\varphi)s = \psi\circ(\varphi\cdot s)$$

Sei jetzt $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$ Basen. Wie berechnet sich ${}_C M_A(\psi \circ \varphi)$ aus ${}_C M_B(\psi)$ und ${}_B M_A(\varphi)$?

Einsetzen liefert die Antwort: sei $a \in A$, es gilt

$$(\psi \circ \varphi)(a) = \psi\Big(\sum_{b \in B} b\,\varphi_{b,a}\Big) = \sum_{b \in B} \psi(b)\,\varphi_{ba}$$

$$= \sum_{b \in B} \sum_{c \in C} c \cdot \psi_{cb} \cdot \varphi_{ba}$$

$$= \sum_{c \in C} c \underbrace{\sum_{b \in B} \psi_{c,b} \cdot \varphi_{b,a}}_{= (\psi \circ \varphi)_{c,a}}$$

#

Es gilt also für alle $c \in C$ und $a \in A$, dass

$$(\psi \circ \varphi)_{c,a} = \sum_{b \in B} \psi_{c,b} \cdot \varphi_{b,a}$$

Sind also C, B, A endliche Mengen, so definieren wir eine Verknüpfung

$$K^{C\times B} \times K^{B\times A} \longrightarrow K^{C\times A}$$

$$\left((\psi_{c,b})_{\substack{c\in C\\ b\in B}}, (\varphi_{ba})_{\substack{b\in B\\ a\in A}} \right) \longmapsto (\xi_{c,a})_{\substack{c\in C\\ a\in A}}$$

durch $\xi_{c,a} = \sum_{b\in B} \psi_{c,b} \cdot \varphi_{b,a}$

die Matrizenmultiplikation.

15. Satz Sind U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$, sind $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ lineare Abbildungen, so gilt

$${}_C M_A(\psi \circ \varphi) = {}_C M_B(\psi) \cdot {}_B M_A(\varphi)$$

Matrizenmultiplikation

$\square$

Für $A = \{1, \dots, l\}$, $B = \{1, \dots, m\}$

$C = \{1, \dots, n\}$

$$K^{n \times m} \times K^{m \times l} \longrightarrow K^{n \times l}$$

$$\begin{array}{cc} & m \\ n & \begin{pmatrix} \psi_{11} & \cdots & \psi_{1,m} \\ \vdots & & \\ \psi_{n,1} & \cdots & \psi_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m,1} & \cdots & \varphi_{m,l} \end{pmatrix} & m \\ l & \end{array}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n,1} & \cdots & \xi_{n,l} \end{pmatrix} & n \\ l & \end{array}$$

$$\xi_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij} \cdot \varphi_{jk}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h.

$$\begin{tikzcd}
\left(K^{D\times C} \times K^{C\times B}\right) \times K^{B\times A} \arrow[r] \arrow[d] & K^{D\times B} \times K^{B\times A} \arrow[d] \\
K^{D\times C} \times K^{C\times A} \arrow[r] & K^{D\times A}
\end{tikzcd}$$

$$\rho_{dc} \qquad \psi_{cb} \qquad \varphi_{ba}$$

Beweis Das ist einfach die Identität

$$\sum_{b\in B}\Big(\sum_{c\in C} \rho_{d,c}\,\psi_{c,b}\Big)\varphi_{b,a} = \sum_{c\in C}\sum_{b\in B} \rho_{d,c}\,\psi_{c,b}\,\varphi_{b,a}$$

$$= \sum_{c\in C} \rho_{d,c}\Big(\sum_{b\in B} \psi_{c,b}\,\varphi_{b,a}\Big)$$

Alternative Begründung: jede Matrix läßt sich deuten als Matrix einer linearen Abbildung, die Komposition von Abbildungen ist aber assoziativ.

$\square$

16. **Matrizenringe** Ist B eine endliche Menge, so liefert die Matrizenmultiplikation eine assoziative Verknüpfung

$$K^{B\times B}\times K^{B\times B}\longrightarrow K^{B\times B}$$

auf den $B\times B$-Matrizen. Man nennt $K^{B\times B}$ den **Matrizenring** (der $B\times B$-Matrizen).

Das Einselement im Ring ist die **Einheitsmatrix** $(\varphi_{b,b'})_{b,b'\in B}=\mathbb{1}_B$ mit $\varphi_{b,b'}=\begin{cases}1 & \text{falls } b=b'\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Für $B=\{1,\dots,n\}$ schreibe

$$\mathbb{1}_n=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

Das Nullelement ist die **Nullmatrix** $\varphi_{b,b'}=0$ für alle $b,b'\in B$.

Ist V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis B, so gilt

$$\mathrm{End}(V)\cong K^{B\times B}$$

Genauer: Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(V)&\longrightarrow K^{B\times B}\\ \varphi&\longmapsto {}_B M_B(\varphi)\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Ringen,

$${}_B M_B(\varphi+\psi) = {}_B M_B(\varphi) + {}_B M_B(\psi)$$

$${}_B M_B(\psi\circ\varphi) = {}_B M_B(\psi)\cdot {}_B M_B(\varphi)$$

$${}_B M_B(\varphi\cdot a) = {}_B M_B(\varphi)\cdot a$$

Die <u>Einheitengruppe</u> des Matrizenrings $K^{n\times n}$ besteht aus allen Matrizen $F \in K^{n\times n}$, für die es ein $G \in K^{n\times n}$ gibt mit

$$F\cdot G = \mathbb{1}_n = G\cdot F$$

Unter den Isomorphien ($B \subseteq V$ eine Basis, $\#B = n$)

$K^{n\times n} \cong K^{B\times B} \cong \mathrm{End}(V)$ entspricht sie genau der <u>generellen linearen Gruppe</u> $GL(V)$, vgl §2.16

Man schreibt

$$GL_n(K) = \{F \in K^{n\times n} \mid F \text{ ist Einheit}\} = \{F \in K^{n\times n} \mid \text{es gibt } G \in K^{n\times n} \text{ mit } GF = \mathbb{1}_n = FG\}$$

Die Matrizen in $GL_n(K)$ heißen auch <u>regulär</u> oder <u>invertierbar</u>.

17. Beispiele (1) $n=1$ $K^{1\times 1} \cong K$ als Ring,

$$GL_1(K) = K^* = \{t \in K \mid t \neq 0\}$$

(2) $n=2$

Lemma $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\delta = ad - bc \neq 0$ gilt.

Beweis Betrachte $F = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Es gilt $F \cdot G = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = G \cdot F$

Ist $\delta \neq 0$, so folgt mit $G' = G \cdot \frac{1}{\delta}$, dass

$$F \cdot G' = \mathbb{1}_2 = G' \cdot F$$

Ist $\delta = 0$, so folgt $F \cdot G = 0$ ← Nullmatrix

Wenn es $H \in K^{2\times 2}$ gäbe mit $H \cdot F = \mathbb{1}_2$, so hätten wir $\underbrace{H \cdot F}_{\mathbb{1}_2} \cdot G = G = H \cdot 0 = 0$ ↯ $\square$

Man nennt $\delta = ad - bc$ die Determinante von $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Wir kommen darauf zurück.

18. Der Körper der komplexen Zahlen

Sei $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$

Offensichtlich ist $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum mit Basis $\{E, I\}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = E\cdot u + I\cdot v$$

Weiter gilt $I^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$

sowie $E \cdot I = I \cdot E = I$ und $E^2 = E$, also

$$(E\cdot u + I\cdot v)(Eu' + Iv') = E(uu' - vv') + I(vu' + uv')$$
$$= (Eu' + Iv')\cdot(Eu + Iv)$$

Es folgt: $(\mathcal{C}, \cdot, +)$ ist ein kommutativer Ring.

Weiter ist $(Eu + Iv)(Eu - Iv) = E\underbrace{(u^2+v^2)}_{=\delta}$

Da gilt: $\delta = 0 \Leftrightarrow u = v = 0$ (denn $u, v \in \mathbb{R}$!)

Folgt: $\mathcal{C}^* = \{ Eu + Iv \mid u^2 + v^2 \neq 0 \}$

$$= \mathcal{C} - \{0\}$$

↑ Nullmatrix

Es folgt: $(\mathcal{C}, \cdot, +)$ ist ein Körper.

#

Ein direkter Vergleich mit §1.10 zeigt:

die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}$

$$(u,v) \longmapsto Eu + Iv$$

ist ein Isomorphismus von $\mathcal{C}$ mit dem in §1.10 angegebenen Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Was bedeutet das anschaulich in der Ebene $\mathbb{R}^2$?

Für $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ setze $t = \sqrt{\delta} = \sqrt{u^2+v^2}$

und schreibe $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot t & -s\cdot t \\ s\cdot t & c\cdot t \end{pmatrix}$

(das geht immer! – für $t=0$ setze $c=1$, $s=0$)

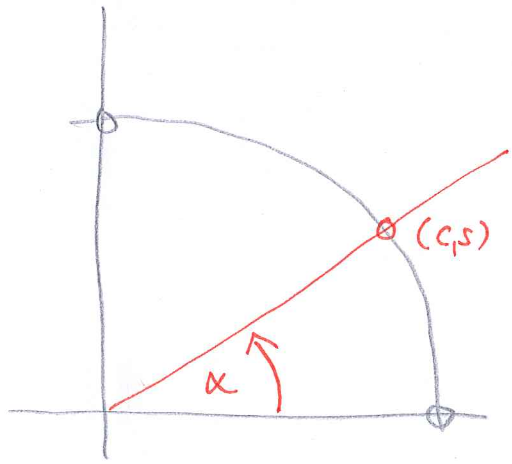
Dann gilt $c^2+s^2=1$, d.h. (c,s) ist ein Punkt auf dem Einheitskreis. Es gibt

$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha < 2\cdot\pi$, mit

$c = \cos(\alpha)$ $\quad s = \sin(\alpha)$

und die Matrix

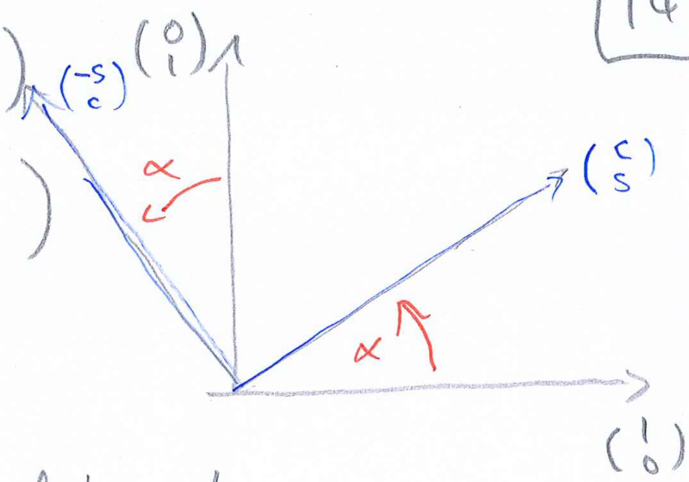
$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ beschreibt eine



Drehung der Ebene (um den Ursprung) mit Drehwinkel α, denn

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

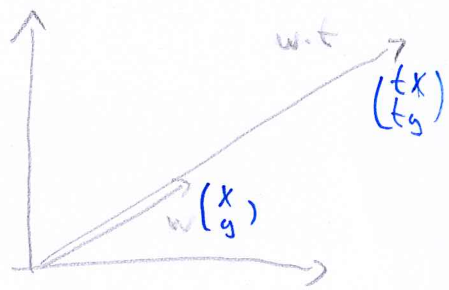
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$$



Weiter ist $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

eine <u>Streckung um den Faktor</u> t

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$$



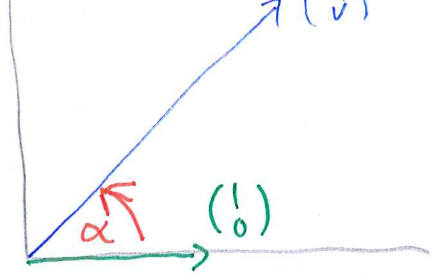
Das Produkt

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

ist eine <u>Drehstreckung</u> (drehen um Winkel α, dann strecken mit Faktor $t = \sqrt{u^2+v^2}$)

also ist <u>$\mathcal{C}$ die Menge aller Drehstreckungen der Ebene.</u> Zu jedem Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gibt es <u>genau eine</u> Drehstreckung $F \in \mathcal{C}$ mit $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, nämlich

$$F = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$



19. <u>Basiswechsel</u> Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $B, C \subseteq V$ zwei Basen. Die Matrix

$$ {}_C M_B(\mathrm{id}_V) $$

ist die Basiswechsel-Matrix, von der Basis B zur Basis C. Wenn $B \neq C$ gilt, dann ist das <u>nicht</u> die Einheitsmatrix.

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^2$ mit Basen $\underbrace{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$

$\underbrace{c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$

$$ {}_B M_C(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} $$

denn $c_1 = b_1 + b_2 \quad c_2 = b_1 + b_2 \cdot 2$

Ist nun $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlich dimensionalen K-Vektorräumen, und sind $D, E \subseteq W$ zwei Basen, dann gilt nach § 3.15, dass

$$ {}_E M_B(\varphi) = {}_E M_D(id_V) \cdot {}_D M_C(\varphi) \cdot {}_C M_B(id_V) $$

Mit Basiswechsel-Matrizen rechnet man also um, welche Matrizen eine lineare Abbildung φ bezüglich verschiedener Basen hat.

<u>Beachte</u>: Es gilt

$$ \mathbb{1}_B = {}_B M_C(id_V) \cdot {}_C M_B(id_V) $$

$$ \mathbb{1}_C = {}_C M_B(id_V) \cdot {}_B M_C(id_V) $$

Basiswechsel-Matrizen sind also <u>immer</u> invertierbar.

Sei jetzt $V = K^m$. Die "Standardbasis" von K^m ist

$$B_m = \{e_1, \ldots, e_m\} \qquad e_j = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ist $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ eine weitere, beliebige Basis von K^m, so gilt für die Basiswechsel-Matrix

$$M_{B_m\, C}(id_V) = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}$$

wegen $c_j = \sum_{i=1}^{m} e_i r_{ij}$, dass

$$c_j = \begin{pmatrix} r_{1,j} \\ \vdots \\ r_{m,j} \end{pmatrix}$$

Die Spalten in der Matrix bestehen also einfach aus den Koordinaten der neuen Basis $c_1, \ldots, c_m$ (genau wie im vorigen Beispiel in $\mathbb{R}^2$).

Über Basiswechsel löst man lineare Gleichungen. Dazu brauchen wir das folgende Ergebnis.

20. <u>Satz</u> Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorraum, sei φ eine lineare Abbildung. Weiter sei $m = \dim(V)$, $n = \dim(W)$ und $r = \dim(\varphi(V))$.
Dann gibt es Basen $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$ und $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq W$ so, dass gilt

$$\varphi(b_i) = c_i \quad \text{für } i = 1, \dots, r$$
$$\varphi(b_i) = 0 \quad \text{für } i > r$$

<u>Beweis</u> Es gilt nach der Dimensionsformel §3.7, dass $m = r + \dim(\ker(\varphi))$. Sei $\{b_{r+1}, \dots b_m\}$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Mit dem Ergänzungslemma §3.5 gibt es $b_1, \dots, b_r \in V$ so, dass $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V ist.
Setze jetzt $c_i := \varphi(b_i)$ für $i = 1, \dots, r$.
Weil $\varphi(b_j) = 0$ für $j = r+1, \dots, m$ gilt, folgt

$$\varphi(V) = \varphi(\langle\{b_1, \dots, b_m\}\rangle) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ÜA}}}{=} \langle\{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_m)\}\rangle$$

$= \langle \{\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_r)\}\rangle = \langle\{c_1,\dots,c_r\}\rangle$

Nach dem Ergänzungslemma enthält $\{c_1,\dots,c_r\}$ also eine Basis von $\varphi(U)$. Andererseits gilt aber nach Definition $\dim(\varphi(U)) = r$, also ist $\{c_1,\dots,c_r\}$ eine Basis von $\varphi(U)$. Wieder mit dem Ergänzungslemma finden wir $c_{r+1},\dots,c_n \in W$ so, dass $c_1,\dots,c_n$ eine Basis von W ist. $\square$

Die Zahl $r = \dim(\varphi(U))$ nennt man den <u>Rang</u> der linearen Abbildung φ,

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \dim(\varphi(U))$$

<u>Korollar</u> Sei $X \in K^{n\times m}$ eine beliebige Matrix. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in GL_n(K)$ und $T \in GL_m(K)$ so, dass

$$S\cdot X\cdot T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Die Zahl r heißt der Rang der Matrix X, $\mathrm{rk}(X) = r$. (und diese Zahl ist durch X eindeutig bestimmt).

Beweis Betrachte die lineare Abbildung $\xi : K^m \to K^n$,

$$\xi\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Es folgt für die Standardbasen $B_n \subseteq K^n$ und $B_m \subseteq K^m$, dass ${}_{B_n}M_{B_m}(\xi) = X$, denn

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} v_j \quad , \quad X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix}.$$

Der vorige Satz liefert nun Basiswechsel-Matrizen S und T mit

$$SXT = \left.\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}\right\} r$$

und $r = \dim(\xi(K^m))$. $\square$

#

Zur Berechnung von S und T brauchen wir elementare Matrizenumformungen.

21. Elementare Matrizenumformungen.

a) Sei $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis des m-dimensionalen K-Vektorraums V. Für $i \neq j$ und $s \in K$ sei $\tau_{ij}(s)$ die durch

$$\tau_{ij}(s)(b_k) = \begin{cases} b_k + b_i \cdot s & \text{wenn } j = k \\ b_k & \text{wenn } j \neq k \end{cases}$$

definierte lineare Abbildung. Es gilt

$$\tau_{ij}(0) = id_V \qquad \tau_{ij}(s)\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(s+t)$$

also ist $\tau_{ij}(s) : V \to V$ stets ein Isomorphismus mit Inverse $\tau_{ij}(-s)$. Die Darstellungsmatrix ist

$$T_{ij}(s) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \boxed{s} \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & & j \end{array} & \end{array}$$

<u>Lemma</u> Sei $X \in K^{n \times m}$, sei $T_{ij}(s) \in K^{n \times n}$ und $T_{kl}(t) \in K^{m \times m}$. Die Matrix $Y = T_{ij}(s) \cdot X$ entsteht aus X durch Addition des s-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. Die Matrix $Z = X \cdot T_{kl}(t)$ entsteht aus X durch Addition des t-fachen der k-ten Spalte zur l-ten Spalte

Beweis Sei $\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots \\ w_n\end{pmatrix} = X\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$. Es gilt

$$T_{ij}(s)\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_i + s\cdot w_j\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

$$w_p = \sum_{q=1}^m \xi_{pq} v_q$$

$$X = \begin{pmatrix}\xi_{11} & \cdots & \xi_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nm}\end{pmatrix}$$

$$T_{kl}(t)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k+tv_l\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

$$X\cdot T_{kl}(t)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_{1k}\, t v_l\\ \vdots\\ \xi_{nk}\cdot t\cdot v_l\end{pmatrix}$$

□

(b) Für $a\in K^*$ sei $\delta_i(a)$ die durch

$$\delta_i(a)(b_h) = \begin{cases} b_h a & \text{für } i=h\\ b_h & \text{sonst}\end{cases}$$

definierte lineare Abbildung. Es gilt $\delta_i(1)=\mathrm{id}_V$ und $\delta_i(a)\delta_i(b)=\delta_i(ab)$, folglich ist $\delta_i(a): V\to V$ ein Isomorphismus. Die Beschreibungsmatrix ist

$$D_i(a) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & a & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

Lemma Sei $X \in K^{n\times m}$, sei $D_i(a) \in K^{n\times n}$ und $D_j(b) \in K^{m\times m}$. Die Matrix $Y = D_i(a)X$ entsteht aus X durch Multiplikation der i-ten Zeile mit a. Die Matrix $Z = X\cdot D_j(b)$ entsteht aus X durch Multiplikation der j-ten Spalte mit b.

Beweis

$$D_i(a)\cdot\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ a\cdot w_i\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} =$$

$$X\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$$

$$w_p = \sum_{q=1}^{m} \xi_{pq} v_q$$

$$D_j(b)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ b\cdot v_j\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

$\square$

c) Es sei $Sym(m) = Sym(\{1,\ldots,m\})$ die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1,\ldots,m\}$, vgl. §1.5. Die Umkehrabbildung zu $\pi \in Sym(m)$ ist π^{-1}!

Für jedes $\pi \in Sym(m)$ definieren wir eine lineare Abbildung $L(\pi): V \to V$ durch $L(\pi)(b_k) = b_{\pi(k)}$ (wobei wieder $B = \{b_1,\ldots,b_m\}$ eine Basis von V sei), vgl §3.10.

Die Begleitmatrix sei $P(\pi) \in K^{m\times m}$.

Es gilt $L(\pi^{-1}) \circ L(\pi) = id_V$, also ist $P(\pi)$ eine invertierbare Matrix. In der j-ten Spalte von $P(\pi)$ steht in der $\pi(j)$-ten Zeile eine 1, an den anderen Stellen stehen 0 in dieser Spalte, denn $L(\pi)(b_j) = b_{\pi(j)}$

Für $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in K^m$ gilt also

$$P(\pi) \underbrace{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}}_{= e_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \pi(j) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

, damit

$$P(\pi)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ v_{\pi^{-1}(m)} \end{pmatrix}$$

Koordinaten werden mit π permutiert.

<u>Lemma</u> Sei $X \in K^{n \times m}$ und $P(\pi) \in K^{n \times n}$ sowie $P(\varrho) \in K^{m \times m}$. Die Matrix $Y = P(\pi) \cdot X$ entsteht aus X durch Ersetzen der $\pi(j)$-ten Zeile durch die j-te Zeile. Die Matrix $Z = X \cdot P(\varrho)$ entsteht aus X durch Ersetzen der k-ten Spalte durch die $\varrho(k)$-te Spalte. (!)

Beweis $P(\pi)\cdot X\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = P(\pi)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ w_{\pi^{-1}(m)} \end{pmatrix}$

$$w_{\pi^{-1}(p)} = \sum_{q=1}^{m} \xi_{\pi^{-1}(p),q} v_q$$

$$X\cdot P(\varrho)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = X\cdot\begin{pmatrix} v_{\varrho^{-1}(1)} \\ \vdots \\ v_{\varrho^{-1}(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$u_p = \sum_{q=1}^{m} \xi_{p,q} v_{\varrho^{-1}(q)} = \sum_{q=1}^{m} \xi_{p,\varrho(q)} v_q \qquad \square \ \#$$

Fazit: Durch Multiplikation einer Matrix $X \in K^{n\times m}$ mit Matrizen vom Typ T, D, P von links und von rechts können wir:

- Zeilen / Spalten von X vertauschen,
- Zeile / Spalte von X mit Skalar $\neq 0$ multiplizieren,
- ein Vielfaches einer Zeile / Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte addieren.

Daher ändert sich der Rang von X nicht, denn diese Matrizen sind alle invertierbar.

Die entsprechenden Umformungen von X heißen elementaren Matrizenumformungen.

22. Lemma Sei $X \in K^{n\times m}$ eine Matrix, bei der nicht alle Einträge $\xi_{pq} = 0$ sind. Dann gibt es Permutationsmatrizen $P(\pi) \in K^{n\times n}$, $P(\varrho) \in K^{m\times m}$, $D_1(a) \in K^{n\times n}$ sowie $T_{j1}(s_j) \in K^{n\times n}$ für $j = 2, 3, \dots, n$, $s_j \in K$ und $T_{1i}(t_i) \in K^{m\times m}$ für $i = 2, \dots, m$, $t_j \in K$

mit

$$T_{n1}(s_n) \cdot \ldots \cdot T_{21}(s_2) \cdot D_1(a) \cdot P(\pi) \cdot X \cdot P(\varrho)\, T_{12}(t_2) \cdots T_{1m}(t_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$*$ = unbekannt

Die Matrizen $D_1(a)$, $P(\pi)$, $P(\varrho)$, $T_{j1}(s_j)$, $T_{1i}(t_i)$ sind explizit / algorithmisch bestimmbar.

Beweis Nach Voraussetzung gibt es einen Eintrag $\xi_{pq} \neq 0$ in der Matrix X. Sei $\pi \in Sym(n)$ die Permutation, die p und 1 vertauscht und $\varrho \in Sym(m)$ die Permutation, die q und 1 vertauscht. Es folgt

$$P(\pi) X P(\rho) = \begin{pmatrix} \xi_{pq} & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & \boxed{\quad * \quad} \\ * & \end{pmatrix}.$$ Setze $a = \xi_{pq}^{-1}$,

es folgt $$D_1(a) P(\pi) X P(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \eta_{12} \cdots & \eta_{1m} \\ \eta_{21} & & \\ \vdots & \boxed{\quad * \quad} & \\ \eta_{n1} & & \end{pmatrix}$$

Setze jetzt $s_2 = -\eta_{21}, \dots, s_n = -\eta_{n1}$

$t_2 = -\eta_{12}, \dots, t_m = -\eta_{1m}$ □

<u>Korollar</u> Sei $X \in K^{n\times m}$. Dann gibt es $L \in GL_n(K)$ und $R \in GL_m(K)$ mit

$$L \cdot X \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

und L und R sind explizit berechenbar.

<u>Beweis</u> Wenn alle Einträge $\xi_{pq} = 0$ sind, ist nichts zu tun. Sonst Induktion nach $\min\{m,n\} = l$. Für $l = 1$ sind wir mit dem vorigen Satz fertig. Für $l > 1$ liefert der vorige Satz Matrizen $L' \in GL_n(K)$ und $R' \in GL_m(K)$ mit

$$L' \cdot X \cdot R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{X} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \tilde{X} \in K^{(n-1)\times(m-1)}$$

Nach Induktionsannahme gibt es $\tilde{L} \in GL_{n-1}(K)$ und $\tilde{R} \in GL_{m-1}(K)$ mit

$$\tilde{L}\,\tilde{X}\,\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Für $L'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{L} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ $\quad R'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

folgt $\underbrace{L'' \cdot L'}_{=L} \cdot X \cdot \underbrace{R' \cdot R''}_{=R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 0 \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ □

(Da L und R invertierbar sind, ist die Anzahl der Einträge 1 genau der Rang von X.)

Anwendung 1: Berechnung der Inversen.

Wenn X invertierbar ist, so gilt $m = n = rk(X)$.

Also $L \cdot X \cdot R = \mathbb{1}_m \rightsquigarrow XR = L^{-1} \cdot \mathbb{1}_m = L^{-1}$

$\rightsquigarrow XRL = \mathbb{1}_m$ genauso $RLX = \mathbb{1}_m$, d.h.

$$X^{-1} = R \cdot L$$

Da wir R und L explizit berechnen können, ist das eine Methode, Matrizen zu invertieren. □

Anwendung 2 — Lösen eines linearen Gleichungssystems

Gegeben: $X \in K^{n \times m}$ und $w \in K^n$

Gesucht: $v \in K^m$ mit $X \cdot v = w$

$$X \cdot v = w \iff L \cdot X \cdot v = L \cdot w$$
$$\iff L \cdot X \cdot R \cdot \underbrace{R^{-1} \cdot v}_{= \tilde{v}} = \underbrace{L \cdot w}_{= \tilde{w}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \end{pmatrix}$$

Lösbar genau dann, wenn $\tilde{w}_j = 0$ für alle $j > r$. Die Lösungen $\tilde{v}$ sind dann von der Form

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_r \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-r} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}\right\} \text{gegeben} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}\right\} \text{frei wählbar} \end{array} \qquad x_1, \dots, x_{m-r} \in K \text{ beliebig}$$

und $v = R \cdot \tilde{v}$ gibt die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems. $\square$