§2 Vektorräume und lineare Abbildungen

1. *Definition* Sei $(V,+)$ eine abelsche Gruppe und sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Weiter sei eine Abbildung (Verknüpfung) gegeben

$$\begin{aligned} V \times K &\longrightarrow V \\ (v,\, a) &\longmapsto va \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $v, w \in V$ und $a \in K$ gilt

$$(v+w)a = va + wa$$

(ii) Für alle $v \in V$ und $a, b \in K$ gilt

$$v(a+b) = va + vb$$

(iii) Für alle $v \in V$ und $a, b \in K$ gilt

$$v(ab) = (va)b$$

(iv) Für alle $v \in V$ gilt $v \cdot 1 = v$

Dann heißt V ein *K-Vektorraum* oder *Vektorraum über K.* Die Elemente von V heißen *Vektoren* und die Elemente von K heißen *Skalare*.

Rechenregeln in Vektorräumen: es gilt

(a) $v \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Null in } K}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Null in } V}}{0}$

(b) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Null in } V}}{0} \cdot a = 0$

(c) $v(-a) = (-v)a = -(va)$

(d) $v(-1) = -v$

(e) Ist $v \in V$, $a \in K$ und ist $va = 0$, so gilt $v = 0$ oder $a = 0$.

<u>Beweis</u> (a) – (d) genauso wie in §1.8,

etwa $v \cdot 0 = v \cdot (0+0) = v \cdot 0 + v \cdot 0 \rightsquigarrow$ Kürzen

zu (e) Angenommen, $va = 0$ und $a \neq 0$. Betrachte

$0 = (va)a^{-1} = v \cdot 1 = v$ □

2. <u>Beispiele</u> (i) $V = \{0\}$ triviale Gruppe, K beliebig.

$0a = 0$ für alle $a \in K$

$\rightsquigarrow$ V ist ein K-Vektorraum

(ii) $V = K$ $va = v \cdot a$

$\rightsquigarrow$ K ist ein K-Vektorraum.

(iii) $V = K^n$ Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus K

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

$$(v_1, \dots, v_n)a = (v_1 a, \dots, v_n a)$$

„Vektorraum der Schule"

(iv) Das Ganze etwas allgemeiner. Ist $(V_j)_{j \in J}$ eine Familie von K-Vektorräumen, dann ist auch das kartesische Produkt

$\prod_{j \in J} V_j$ ein K-Vektorraum bezüglich

$$((v_j)_{j \in J})a = (v_j a)_{j \in J}$$

$$(v_j)_{j \in J} + (w_j)_{j \in J} = (v_j + w_j)_{j \in J}$$

Insbesondere ist der Raum $\prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ aller reellen Folgen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3. <u>Definition</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Untergruppe $W \subseteq V$ heißt <u>Untervektorraum</u> (kurz <u>Unterraum</u>), wenn für alle

$w \in W$ und $a \in K$ gilt $wa \in W$.

Beispiel (a) $\{0\} \subseteq V$ und V selbst sind stets Untervektorräume

#

(b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ist Untergruppe bzgl. Addition, aber kein Unterraum. Zum Beispiel gilt für $v = 1$, $a = \frac{1}{2}$ nicht $v \cdot a = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.

4. Weitere Beispiele.

Vorab eine Schreibweise. Sind A, B Mengen, so bezeichnet B^A die Menge aller Abbildungen von A nach B,

$$B^A = \{f : A \to B\}$$

Ist K ein Körper und X eine nichtleere Menge, dann ist $K^X = \{f : X \to K\}$ ein K-Vektorraum, wenn wir folgende Verknüpfungen benutzen:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

für $x \in X$ und $f, g \in K^X$

$$(f \cdot a)(x) = f(x) \cdot a$$

für $a \in K$, $x \in X$, $f \in K^X$

Ist $X = \mathbb{N}$, so erhalten wir wieder mit

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid x_j \in \mathbb{R} \}$$

den Raum aller reellen Folgen.

Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge (zum Beispiel ein Intervall), so ist $\mathbb{R}^X$ der Raum aller reellen Abbildungen $f: X \to \mathbb{R}$, der in der Analysis wichtig ist.

5 Ist $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen Folgen, $K = \{ (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in V \mid \lim_{j \in \mathbb{N}} v_j \text{ existiert} \}$ der Raum aller konvergenten Folgen und $N = \{ (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in K \mid \lim_{j \in \mathbb{N}} v_j = 0 \}$ der Raum aller Nullfolgen, dann sind

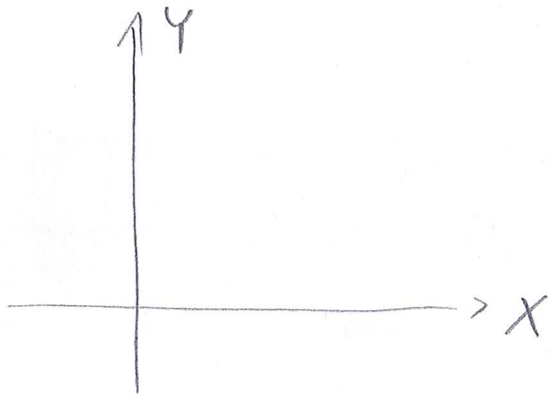
$$N \subseteq K \subseteq V \quad \text{Untervektorräume.}$$

(Was muss man dazu nachweisen?)

5. <u>Noch mehr Beispiele</u> Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, die "Tafelebene" und Teilräume darin.

Die "Koordinatenachsen"

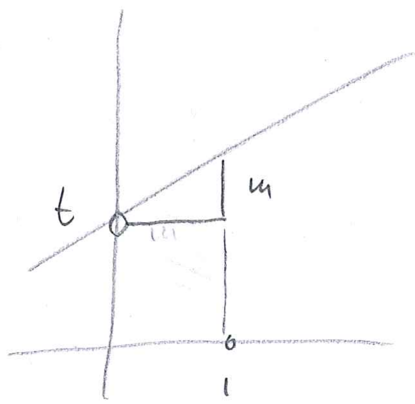
$X = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $Y = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$



sind offensichtlich lil Untervektorräume.

Was ist mit Geraden der Form "$y = mx+t$"?

Genauer: $G_{m,t} := \{(x, mx+t) \mid x \in \mathbb{R}\}$



$(x, mx+t)a = (xa, mxa+ta)$

Für $a \neq 1$ liegt dieser Punkt genau dann in $G_{m,t}$, wenn $t = 0$.

Also ist $G_{m,t}$ für $t \neq 0$ <u>kein</u> Untervektorraum (aber für $t=0$ ist es einer).

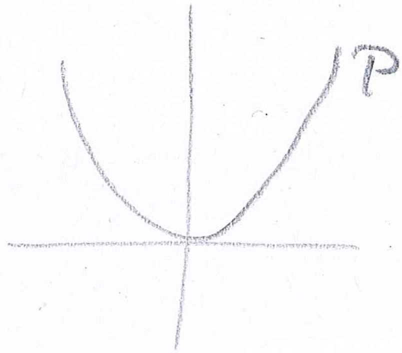
Es gilt $G_{0,0} = X$, setze $G_{\infty,0} = Y$

Tatsächlich ist $\{ G_{m,0} \mid 0 \le m \le \infty \} \cup \{\{0\}\} \cup \{V\}$ die Menge aller Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^2$.

Im Moment können wir das noch nicht beweisen.

Andere Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind keine Untervektorräume, z.B. die Parabel

$$P = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$$



(Warum?)

6. Lemma Sei V ein K-Vektorraum und sei $\mathcal{U}$ eine (nichtleere) Menge von Untervektorräumen von V. Dann ist auch

$$\bigcap \mathcal{U} = \{ v \in V \mid \text{für alle } U \in \mathcal{U} \text{ gilt } v \in U \}$$

ein Unterraum. Kurz: Durchschnitte von Unterräumen sind wieder Unterräume.

Beweis Für jedes $U \in \mathcal{U}$ gilt $0 \in U$, also gilt $0 \in \bigcap \mathcal{U}$. Ist $v, w \in \bigcap \mathcal{U}$, so gilt $v, w \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}$, also auch $\left\{ \begin{array}{l} v+w \in U \\ va \in U \\ -v \in U \end{array} \right\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$, also auch $-v, v+w, va \in \bigcap \mathcal{U}$ für alle $a \in K$. $\square$

Achtung! Die Vereinigung von Unterräumen ist i. A. kein Unterraum, z.B. in §2.5 ist $X \cup Y$ kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$! (Warum?)

7. Definition Sei V ein K-Vektorraum, sei $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Es sei $\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum und } X \subseteq U\}$. Wegen $V \in \mathcal{U}$ ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Man nennt den Unterraum

$$\langle X \rangle = \bigcap \mathcal{U}$$

das Erzeugnis von X.

Wenn $W = \langle X \rangle$ gilt, so heißt X Erzeugendensystem von W.

Bsp $\langle V \rangle = V$

$\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ (Warum?)

Satz Sei V ein K-Vektorraum, sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann besteht $W = \langle X \rangle$ aus allen endlichen Summen der Form $x_0 a_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s$

mit $s \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_s \in X \cup \{0\}$,

$a_0, \dots, a_s \in K$.

<u>Beweis</u> Sei $U = \left\{ x_0 a_0 + \dots + x_s a_s \;\middle|\; \begin{array}{l} s \in \mathbb{N} \\ x_0, \dots, x_s \in X \cup \{0\} \\ a_0, \dots, a_s \in K \end{array} \right\}$

Zu zeigen ist $U = \langle X \rangle$. Offensichtlich gilt

(i) $X \subseteq U$

(ii) Ist $H \subseteq V$ ein Unterraum mit $X \subseteq H$, so gilt $U \subseteq H$ (klar?)

(iii) U ist Unterraum, denn $x_j, x_j' \in X \cup \{0\}$

$0 \in U$, $x_0 a_0 + \dots + x_s a_s \in U \Rightarrow$

$x_0' a_0' + \dots + x_r' a_r' \in U$

$$x_0 a_0 + \dots + x_s a_s + x_0' a_0' + \dots + x_r' a_r' \in U$$

$$-(x_0 a_0 + \dots + x_s a_s) = x_0(-a_0) + \dots + x_s(-a_s) \in U$$

$$(x_0 a_0 + \dots + x_s a_s) a = x_0(a_0 a) + \dots + x_s(a_s a) \in U$$

Es folgt $\langle X \rangle = U$. $\square$

\#

8. <u>Definition</u> Es seien V, W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt <u>lineare Abbildung</u>, wenn für alle $x, y \in V$, $a \in K$ gilt

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(xa) = \varphi(x)a$

Die Bedingung (i) sagt, dass φ ein Homomorphismus der abelschen Gruppen V, W ist. Die Bedingung (ii) ist eine zusätzliche Bedingung.

<u>Lemma</u> Es sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann sind

$$\ker(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$$

$$\varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

Untervektorräume.

<u>Beweis</u> Wir wissen schon aus § 1.17, dass $\ker(\varphi)$ und $\varphi(V)$ <u>Untergruppen</u> von V bzw W sind.

Ist $a \in K$, $v \in \ker(\varphi)$, so gilt

$$\varphi(va) = \varphi(v)a = 0a = 0, \text{ also } va \in \ker(\varphi)$$

Also ist $\ker(\varphi)$ ein Untervektorraum.
Ist $v \in V$, $a \in K$, so ist $\varphi(v)a = \varphi(va)$, also $\varphi(va) \in \varphi(V)$ und $\varphi(V)$ ist ein Unterraum. $\square$

<u>Beispiel</u> (a) $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $m \in \mathbb{R}$

Setze $\varphi_m : V \to \mathbb{R}$, $\varphi_m(x,y) = y - mx$

Es gilt $\varphi_m((x,y)+(x',y')) = \varphi_m((x+x', y+y')) = y+y' - m(x+x')$

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_m(x',y') = y - mx + y' - mx' \quad /\!/$$

$$\varphi_m(x,y)a = ya - mxa = \varphi(xa, ya)$$

$\Rightarrow \varphi_m$ ist linear Abbildung.

$$\ker(\varphi_m) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\} = G_{m,0}$$

Das ist kein Zufall – wir werden sehen, dass <u>jeder</u> Unterraum eines Vektorraums ein Kern einer geeigneten linearen Abbildung ist.

(b) $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi_m} \mathbb{R}^2$

$\psi_m(x) = (x, mx)$ ebenfalls linear.

$$\psi_m(\mathbb{R}) = G_{m,0}$$

9. **Satz** Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann sind äquivalent: (i) φ ist injektiv
(ii) $\ker(\varphi) = \{0\}$

Beweis Das folgt direkt aus § 1.8, denn eine lineare Abbildung ist insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $\square$

Bemerkung Ist $\varphi: V \to W$ linear und bijektiv, mit Umkehrabbildung $\psi: W \to V$ (also $\varphi \circ \psi = id_W$ und $\psi \circ \varphi = id_V$), so ist auch ψ linear. Man nennt φ dann einen linearen Isomorphismus und schreibt $W \cong V$.

Beweis Sei $w, w' \in W$ und $a \in K$. Zu zeigen ist
$\psi(w+w') = \psi(w) + \psi(w')$ und $\psi(wa) = \psi(w)a$.
Da φ surjektiv ist, gibt es $v, v' \in V$ mit
$\varphi(v) = w$, $\varphi(v') = w'$ und $w+w' = \varphi(v+v')$.
Also $\psi(w+w') = \psi\circ\varphi(v+v') = v+v' = \psi\circ\varphi(v) + \psi\circ\varphi(v')$
$= \psi(w) + \psi(w')$ und $\psi(wa) = \psi(\varphi(va)) =$
$va = \psi\varphi(v)a = \psi(w)a$ $\square$

10. <u>Beispiel</u> Betrachte $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, schreibe die Elemente als $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ (unendliche Folge reeller Zahlen)

Definiere lineare Abbildungen $\rho, \lambda : V \to V$ durch

$\rho(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ (Shift nach rechts)

$\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ (Shift nach links)

Es ist leicht zu sehen, dass ρ und λ linear sind.

Es gilt $\lambda \circ \rho = \mathrm{id}_V$, also ist ρ injektiv und λ ist surjektiv. <u>Aber</u>:

$$\rho \circ \lambda (x_0, x_1, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

also gilt $\rho \circ \lambda \neq \mathrm{id}_V$ und $\rho \circ \lambda$ ist weder surjektiv noch injektiv!

11. <u>Nebenklassen und Quotienten in Vektorräumen.</u>

Sei V ein K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Nach §1.16 ist die Menge der Nebenklassen

$$V/U = \{ v + U \mid v \in V \}$$

eine abelsche Gruppe, mit Verknüpfung

$$(v+U) + (v'+U) = (v+v') + U$$

Man nennt V/U den <u>Quotienten(raum) von V modulo U</u>.

<u>Satz</u> Ist V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist auch V/U ein K-Vektorraum mit Skalarenmultiplikation

$$(v+U)\cdot a = va+U$$

<u>Beweis</u> Wir müssen zuerst zeigen, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist. Angenommen, $v+U = v'+U$. Dann gilt nach §1.15 $v-v' \in U$, also auch $va-v'a \in U$, also $va+U = v'a+U$.

Die Eigenschaften (i)-(iv) sind jetzt einfach:

(i) $((v+U)+(w+U))a = (v+w+U)a = va+wa+U = (v+U)a+(w+U)a$

(ii) $(v+U)(a+b) = v(a+b)+U = va+vb+U = (va+U)+(vb+U)$

usw. $\square$

12. <u>Definition</u> Sei V ein K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir definieren eine Abbildung

$$\pi : V \longrightarrow V/U$$

durch $\pi(v) = v+U$.

<u>Satz</u> Die so definierte Abbildung ist linear und surjektiv.

Man nennt π die <u>kanonische Quotientenabbildung</u> $\pi : V \to V/U$. Es gilt $\pi^{-1}(v+U) = v+U$.

Bew: Das ist klar:

$$\pi(v+w) = v+w+U = v+U+w+U = \pi(v)+\pi(w)$$

$$\pi(va) = va+U = (v+U)a = \pi(v)a.$$

$$\pi(w) = w+U = v+U \Leftrightarrow w-v \in U \Leftrightarrow w \in v+U \qquad \square$$

13. Theorem (Homomorphiesatz für Vektorräume)

Es seien V, W zwei K-Vektorräume und es sei $\varphi: V \to W$ linear. Weiter sei $U \leq V$ ein Unterraum mit $U \leq \ker(\varphi)$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}: V/U \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, wobei $\pi: V \to V/U$ die kanonische Quotientenabbildung ist.

Die Aussage des Satzes wird übersichtlicher als kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\
V/U \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

$$\overline{\varphi} \circ \pi \overset{!}{=} \varphi$$

Beweis: Existenz von $\overline{\varphi}$:

Definiere $\overline{\varphi}(v+U) = \varphi(v)$

Das ist wohldefiniert: angenommen, $v+U = v'+U$. Dann gilt $v-v' \in U \subseteq \ker(\varphi)$, also $\varphi(v-v')=0$, also $\varphi(v)=\varphi(v')$.

Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist linear, weil φ linear ist:

$$\overline{\varphi}(v+U+w+U) = \varphi(v+w) = \varphi(v)+\varphi(w) = \overline{\varphi}(v+U)+\overline{\varphi}(w+U)$$

$$\overline{\varphi}((v+U)a) = \overline{\varphi}(va+U) = \varphi(va) = \varphi(v)a = \overline{\varphi}(v+U)a$$

Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$

Angenommen, $g: V/U \to W$ ist eine weitere lineare Abbildung mit $g \circ \pi = \varphi$. Es folgt $g(v+U) = \varphi(v) = \overline{\varphi}(v+U)$ für alle $v \in V$, also $g = \overline{\varphi}$ □

Argumente mit kommutativen Diagrammen werden Sie im Mathematikstudium immer wieder begegnen. Der Homomorphiesatz ist ein zentraler Satz in der Algebra.

<u>Korollar A</u> Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist genau dann injektiv, wenn gilt $U = \ker(\varphi)$.

<u>Beweis</u> Es gilt $\overline{\varphi}(v+U) = 0 \iff \varphi(v) = 0 \iff v \in \ker(\varphi)$

Angenommen, $U = \ker(\varphi)$. Ist dann $\overline{\varphi}(v+U) = 0$, so folgt $v \in U$, also $v+U = 0+U = U$, also $\ker(\overline{\varphi}) = \{U\}$

Angenommen $U \neq \ker(\varphi)$. Dann gibt es $v \in \ker(\varphi) - U$, es folgt $v+U \neq U$, aber $\overline{\varphi}(v+U) = \varphi(v) = \varphi(0) = \overline{\varphi}(U)$ $\square$

<u>Korollar B</u> Ist $U = \ker(\varphi)$, dann ist die Abbildung

$$\overline{\varphi} : V/U \longrightarrow \varphi(W)$$

ein <u>Isomorphismus</u> von Vektorräumen (d.h. linear und bijektiv)

Wir wenden das auf <u>lineare Gleichungen</u> an.

14. <u>Def</u> Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Sei $b \in W$. Dann nennt man

$$\varphi(x) = b$$

eine <u>lineare Gleichung</u> (oder <u>lineares Gleichungs-</u>

system. Wir interessieren uns für die Lösungsmenge

$$L = \{x \in V \mid \varphi(x) = b\} = \varphi^{-1}(b)$$

und dafür, wie man sie findet.

Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & & W \\
V/\ker(\varphi) \arrow[urr, "\bar{\varphi}"] & &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}(v + \ker(\varphi)) = \varphi(v)$. Nach §2.13 ist $\bar{\varphi}$ injektiv. Es gibt offensichtlich zwei Fälle

Fall 1 $\quad b \notin \varphi(V)$, es gibt keine Lösung,

$$L = \emptyset$$

Fall 2 $\quad b \in \varphi(V)$, dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = b$ (also $v \in L$). Dann gilt $\bar{\varphi}^{-1}(b) = \{v + \ker(\varphi)\}$, weil $\bar{\varphi}$ injektiv ist (genau ein Urbild, die

Nebenklasse $v+\ker(\varphi)$). Dann ist

$\varphi^{-1}(b) = \pi^{-1}(v+\ker(\varphi)) = v+\ker(\varphi)$, vgl §2.12.

Es gilt dann also

$$L = v + \ker(\varphi)$$

Die <u>Lösungsstrategie</u> einer linearen Gleichung ist also

(a) bestimme $\ker(\varphi)$

(b) finde <u>eine</u> Lösung $v \in V$

Dann ist $L = v + \ker(\varphi)$ die Menge aller Lösungen.

Wichtiger Spezialfall: $b = 0$. Da <u>immer</u> gilt $0 \in \varphi(V)$ ist die Lösungsmenge dann nicht leer, wir sind also in Fall 2, und

$$L = \ker(\varphi).$$

Für konkrete Rechnungen sind oft Matrizen hilfreich – das kommt im nächsten Kapitel.

Beispiel (a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $\varphi : V \to W$

$\varphi(x,y) = 2x - y$ ist lineare Abbildung.

Sei $b = -1$. Es gilt $\varphi(0,1) = -1$

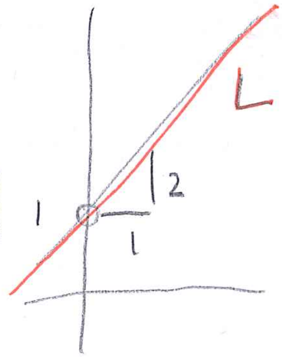
$\ker(\varphi) = \{(x,y) \mid 2x - y = 0\} = \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Die Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$2x - y = -1$$

ist also $L = (0,1) + \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

$$= \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



(b) $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $V = \mathbb{R}^X$

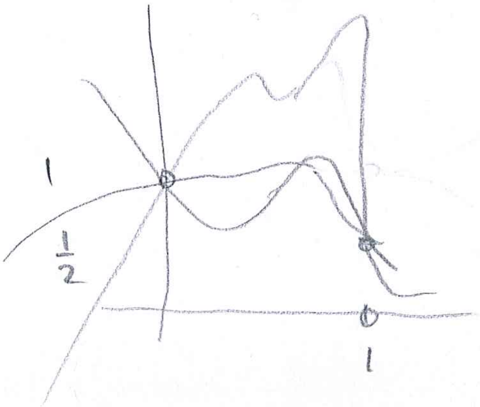
Gesucht sind Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = \frac{1}{2}$. Betrachte dazu $\varphi : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^2$

$$f \mapsto (f(0), f(1))$$

das ist eine lineare Abbildung. Der Kern von φ besteht aus allen Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(1) = 0$. Eine Lösung ist $f(t) = -\frac{1}{2}t + 1$. Die Menge aller

Lösung ist also

$$L = f + \{ g : [0,1] \to \mathbb{R} \mid g(0) = g(1) = 0 \}$$



Auf die effektive Berechnung von L kommen wir später zurück.

15. Räume von linearen Abbildungen

Sei W ein K-Vektorraum und X eine nicht leere Menge. Dann ist ähnlich wie in §2.4 die Menge W^X aller Abbildungen $f: X \to W$ ein K-Vektorraum, wenn man setzt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad f, g \in W^X$$
$$(fa)(x) = f(x)a \qquad a \in K$$
$$x \in X$$

$\boxed{\text{Beweis ÜA}}$

Sei jetzt V ein weiterer K-Vektorraum. Dann ist also die Menge <u>aller</u> Abbildungen $f: V \to W$ ein K-Vektorraum. Wir betrachten jetzt die Teilmenge aller <u>linearen</u> Abbildungen

$$L(V,W) = \{ f: V \to W \mid f \text{ ist linear} \}$$

Andere Schreibweise: $L(V,W) = \mathrm{Hom}_K(V,W)$

"K-Homomorphismen von V nach W"

<u>Lemma</u> $L(V,W) \subseteq W^V$ ist ein Untervektorraum und insbesondere ein K-Vektorraum.

<u>Beweis</u> Die Nullabbildung $V \to W$, $v \mapsto 0$ ist linear, also in $L(V,W)$. Sei $a,b \in K$, $v,v' \in V$, $f,g \in L(V,W)$. Dann gilt

$$(f+g)(v+v') = f(v+v') + g(v+v') = f(v) + f(v') + g(v) + g(v')$$

$$= (f+g)(v) + (f+g)(v')$$

$$(f+g)(va) = f(va) + g(va) = (f(v) + g(v))a$$

$$= (f+g)(v)a$$

also $f+g \in L(V,W)$

$$(-f)(v+v') = -f(v+v') = -f(v) - f(v')$$

$$(-f)(va) = -f(va) = -f(v)a = (-f)(v)a$$

also $-f \in L(V,W)$

$$(fb)(v+v') = f(v+v')b = f(v)b + f(v')b = (fb)(v) + (fb)(v')$$

$$(fb)(va) = f(va)b = f(v)ab = f(v)ba = (fb)(v)a$$

also $fb \in L(V,W)$

damit ist gezeigt, dass $L(V,W) \subseteq W^V$ ein Unterraum ist. $\square$

16. Der Endomorphismenring eines Vektorraums

Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist nach §2.15 die Menge $L(V,V)$ ein K-Vektorraum. Nach §1.2 ist $L(V,V)$ zusätzlich eine Halbgruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, denn Hintereinanderausführungen von linearen Abbildungen sind wieder linear: ist $f,g \in L(V,V)$, so ist auch $f \circ g : V \to V$ linear. Die Identität id_V ist dabei das Neutralelement.

<u>Lemma</u> $L(V,V)$ ist ein Ring mit der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen

als Multiplikation.

<u>Beweis</u> Wir wissen schon, dass $(L(V,V),+)$ eine abelsche Gruppe ist (sogar ein K-Vektorraum). Für $f,g,h \in L(V,V)$ und $v \in V$ gilt

$$(f\circ(g+h))(v) = f((g+h)(v)) = f(g(v)+h(v))$$

$$= f\circ g(v) + f\circ h(v) \Rightarrow f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$$

$$((f+g)\circ h)(v) = f(h(v)) + g(h(v)) = (f\circ h + g\circ h)(v)$$

$\square$

Diesen Ring nennt man den <u>Endomorphismenring</u> von V, $End(V) = L(V,V)$

Die <u>Einheitengruppe</u> dieses Ringes ist die <u>generelle lineare Gruppe</u>

$$GL(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ linear + bijektiv}\}$$

$$= End(V)^*$$

Der Ring $End(V)$ und die Gruppe $GL(V)$ werden im Folgenden immer wieder auftauchen.

17. <u>Beispiel</u> $V = K$. Eine lineare Abbildung $\varphi: K \to K$ ist eindeutig festgelegt durch $\varphi(1)$, denn $\varphi(1\cdot a) = \varphi(1)\cdot a$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\to K \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

ist ein bijektiver Homomorphismus von Ringen, denn:

$$(\varphi + \psi)(1) = \varphi(1) + \psi(1)$$

$$(\varphi \circ \psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(1\cdot\psi(1)) = \varphi(1)\psi(1)$$

In diesem Fall gilt also $GL(V) \cong K^* = K - \{0\}$.

18. <u>Der Dualraum</u> Ein ganz anderes Beispiel ist der Fall, wo V ein beliebiger K-Vektorraum ist und $W = K$. Man nennt $L(V,K)$ den <u>Dualraum</u> von V und schreibt dafür auch

$$V^* = V^\vee = L(V,K).$$

Ist $\xi \in V^\vee$, also $\xi: V \to K$ linear und ist ξ nicht die Nullabbildung, $\xi \neq 0$, dann ist ξ surjektiv. Denn: es gibt dann ein $v \in V$ mit $\xi(v) = x \neq 0$, also $\xi(vx^{-1}) = 1$, also $\xi(vx^{-1}a) = a$ für $a \in K$ beliebig. Man nennt die Elemente von $V^\vee$ <u>Linearformen</u> auf V. Der Kern einer Linearform $\xi \neq 0$ heißt <u>Hyperebene</u> in V. Ist $H = \ker(\xi)$ und $\xi \neq 0$, so gilt nach dem Homomorphiesatz §2.13, dass

$$V/H \cong K$$

<u>Beispiel</u> $V = \mathbb{R}^2$. Für jedes Paar $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist dann die Abbildung

$$\xi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto ax + yb$$

eine Linearform. Tatsächlich ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^\vee$$
$$(a,b) \longmapsto \xi_{a,b}$$

linear und bijektiv (ÜA), also

$$(\mathbb{R}^2)^\vee \cong \mathbb{R}^2$$