§0 Einige Grundlagen: Mengen, Zahlen, Logik, Beweise

1. Die gesamte moderne Mathematik baut auf den Begriff der Mengen auf.

Idee: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten (die auch Mengen sind). Diese Objekte heißen Elemente der Menge. Ist x Element der Menge A, schreibt man

$$x \in A$$

Wenn x kein Element der Menge A ist, schreibt man

$$x \notin A.$$

Beispiel A sei die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Dann gilt

$$2 \in A$$
$$5 \notin A$$

Es gibt ein paar einfache Regeln, wie Mengen beschrieben oder definiert werden können.

(a) Durch explizite <u>Aufzählung</u> ihrer Elemente, z B

$\{0, 1, 7\}$ oder $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Menge der natürlichen Zahlen

(b) Durch <u>Aussondern</u>. Ist A eine Menge und φ eine Bedingung an Elemente von A, so ist auch

$$\{x \in A \mid \varphi(x) \text{ ist wahr}\}$$

eine Menge. Beispiel $A = \mathbb{N}$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Eine wichtige Menge ist die <u>leere Menge</u>

$$\emptyset = \{\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\}$$

Weitere Mengen, die Standardnamen haben und immer wieder auftauchen werden:

$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der <u>natürlichen Zahlen</u> (in dieser Vorlesung gilt $0 \in \mathbb{N}$, manche Mathematiker oder

Brüche nehmen die 0 nicht dazu!)

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Menge der ganzen Zahlen

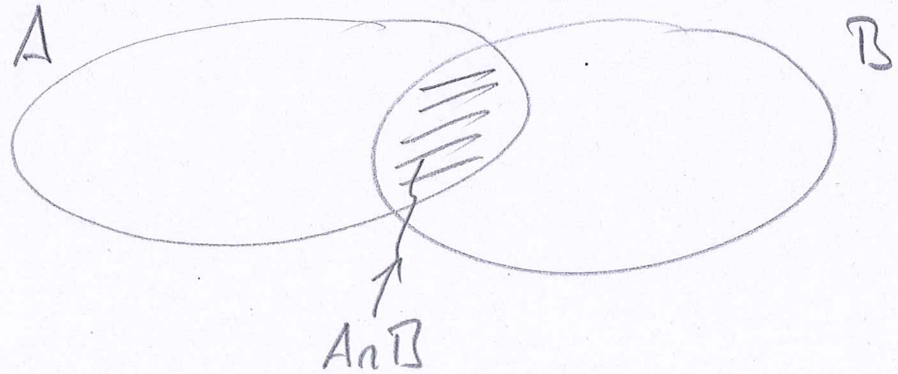
$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

Menge der rationalen Zahlen ("Brüche")

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen $\rightsquigarrow$ Analysis

Ein Spezialfall von (b) ist der Durchschnitt oder die Schnittmenge: sind A und B Mengen, so setzt man

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$$



Beispiel: $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
$B = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$A \cap B = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ für jede Menge A

$A \cap A = A$

Das folgende Bildungsprinzip für Mengen ist dagegen neu: die Vereinigung. Sind A und B Mengen, so besteht $A \cup B$ aus allen Elementen von A oder B: man "wirft die Inhalte zusammen".

(c) $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$

Beachte: "Oder" bedeutet in der Mathematik (anders als in der Alltagssprache!), dass x auch beide Bedingungen erfüllen darf / in beiden Mengen sein kann.

Bsp $\{1,3,5\} \cup \{3,-2,0\} = \{1,3,5,-2,0\}$

$\emptyset \cup A = A$ für jede Menge A

$A \cup A = A$

2. Teilmengen Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Das haben wir stillschweigend einige Male benutzt.

Wenn A und B Mengen sind und wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, so heißt A <u>Teilmenge</u> von B und man schreibt

$$A \subseteq B$$

<u>Beispiele</u> $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$ gilt immer

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Die Aussage $A = B$ gilt genau dann, wenn gilt $A \subseteq B$ <u>und</u> $B \subseteq A$.

Beachte den Unterschied zwischen $\in$ und $\subseteq$!

$x \in A$ heißt x ist Element der Menge A

$x \subseteq A$ heißt, dass alle Elemente von x auch Elemente von A sind

das ist (meistens) <u>nicht</u> das gleiche!!

Schreibe $A \not\subseteq B$, wenn A <u>keine</u> Teilmenge von B ist, wenn es also ein Element $x \in A$ gibt mit $x \notin B$.

Schreibe $A \subsetneqq B$ wenn gilt $A \subseteq B$
und $A \neq B$

(A heißt dann <u>echte Teilmenge</u> von B).

Beachte den Unterschied zwischen $\not\subseteq$ und $\subsetneqq$!

$\{1,2\} \not\subseteq \{2\}$

$\{1\} \subsetneqq \{1,5\}$

Eine Konstruktion von Teilmengen ist das <u>Komplement</u>: sind A, B Mengen, so ist

(d) $A - B = \{a \in A \mid a \notin B\}$

das <u>Komplement von B in A</u>.

#

Andere Schreibweise $A \setminus B$ (oft verwendet)

Die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge A ist die <u>Potenzmenge</u> von A,

(e) $$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

<u>Beispiele</u> $\mathcal{P}(\phi) = \{ \phi \} \neq \phi$ (!)

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{ \phi, \{1\} \}$

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$

Es gilt immer $A \in \mathcal{P}(A)$ und $\phi \in \mathcal{P}(A)$.

Andere Schreibweise: $\mathcal{P}(A) = 2^A$

(aus Gründen, die wir später sehen werden).

3. <u>Paare von Mengen und kartesische Produkte</u>

Die Elemente einer Menge haben keine spezielle "Reihenfolge". Es gilt z.B.

$$\{1,2\} = \{2,1\} \stackrel{(!)}{=} \{2,2,1\}$$

(Doppelnennungen sind unwichtig!)

Manchmal möchte man aber eine Reihenfolge haben. Insbesondere will man <u>Paare</u> von Mengen betrachten, (x,y), mit einem ersten Eintrag x und einem zweiten Eintrag y.

Für solche Paare soll gelten

$$(x,y) = (u,v)$$

genau dann, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt.

Wie bekommt man das mit Mengen hin?

(Kuratowski)

$$\text{Setze } (x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

Damit ist das Problem gelöst! Denn

$$(x,y) = (u,v) \quad \text{bedeutet ja}$$

$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$$

Ist $\{x\} = \{u\}$, so ist $x = u$ und

$$\{x,y\} = \{u,v\} = \{x,v\}, \text{ also } y = v.$$

Ist $\{x\} = \{u,v\}$, so ist $u = v = x$ und

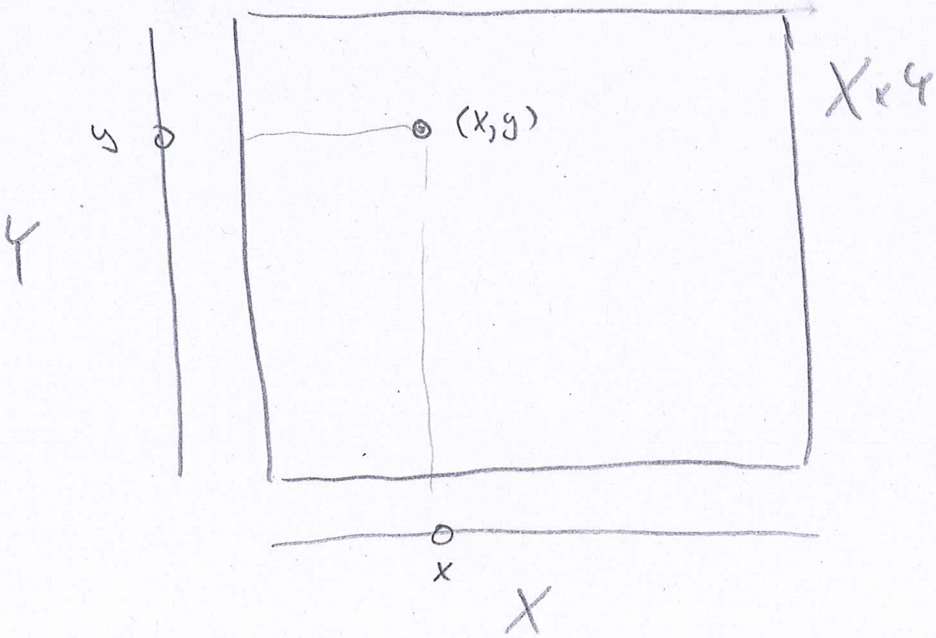
$$\{x,y\} = \{u\} = \{x\}, \text{ also } y = x = u = v = x.$$

Man muss die Kuratowski - Konstruktion von Paaren nicht im Kopf behalten. Wichtig ist für uns nur, dass man in der Sprache der Mengen Paare (x,y) mit den gewünschten Eigenschaften bilden kann.

Sind X und Y Mengen, so besteht ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ aus allen Paaren (x,y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.

$$X \times Y = \{ (x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y \}$$

Graphische Anschauung:



Zum Beispiel stellt man sich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Ebene vor, deren Punkte zwei reelle Koordinaten haben.

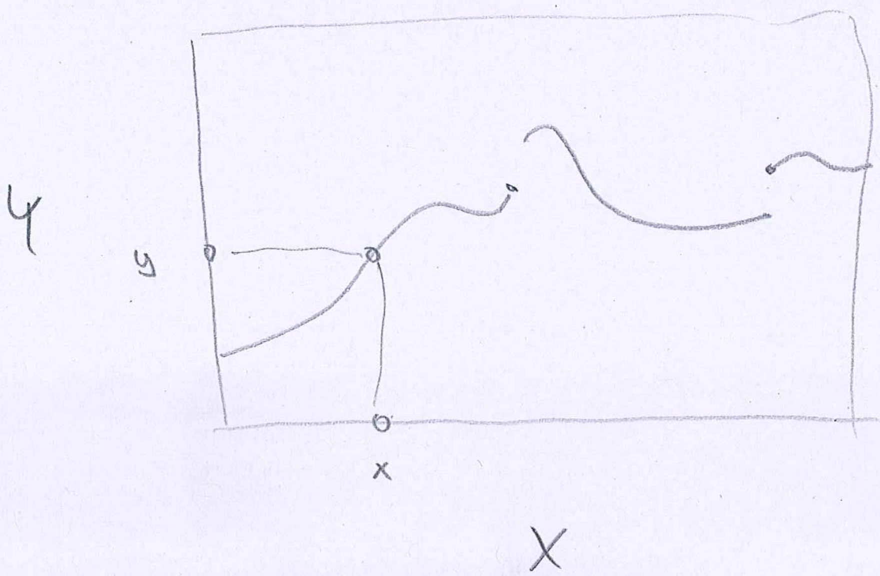
4. Abbildungen

Idee: Eine Abbildung f von einer Menge X in eine Menge Y ordnet jedem $x \in X$ (genau) ein $y = f(x) \in Y$ zu.

Manchmal kann man das durch eine Formel explizit angeben, zum Beispiel bei $X = Y = \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^2$, oder durch den Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Manchmal lassen sich Abbildungen aber nicht so explizit beschreiben. Stattdessen benutzt man Mengen: man definiert eine Abbildung f von X nach Y als Menge f von Paaren (x,y), $f \subseteq X \times Y$, so dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x,y) \in f$



Mit anderen Worten, eine Abbildung ist – als Menge – das gleiche wie ihr Graph oder Schaubild!

Wie in §0.3 muss man sich diese Definition über Mengen (jetzt) nicht merken – wichtig ist die anfangs beschriebene Eigenschaft einer Abbildung, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Man schreibt kurz

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

als Abkürzung von: f ist eine Abbildung von der Menge X in die Menge Y. Wenn man explizit angeben will, wie $x \in X$ abgebildet wird, schreibt man auch $x \longmapsto f(x)$.

↑ beachte den Pfeil!

Die Menge X heißt <u>Definitionsbereich</u> und die Menge Y <u>Zielbereich</u> der Abbildung.

Wenn gilt $f(x) = y$, so heißt y <u>Bild</u> von x und x heißt <u>Urbild</u> von y.

Beachte: jedes $x \in X$ hat genau ein Bild – nämlich $f(x)$ – aber ein $y \in Y$ kann keins, ein oder mehrere Urbilder haben.

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dann hat $y = -1$ kein Urbild, und $y = 1$ hat zwei Urbilder, ± 1.

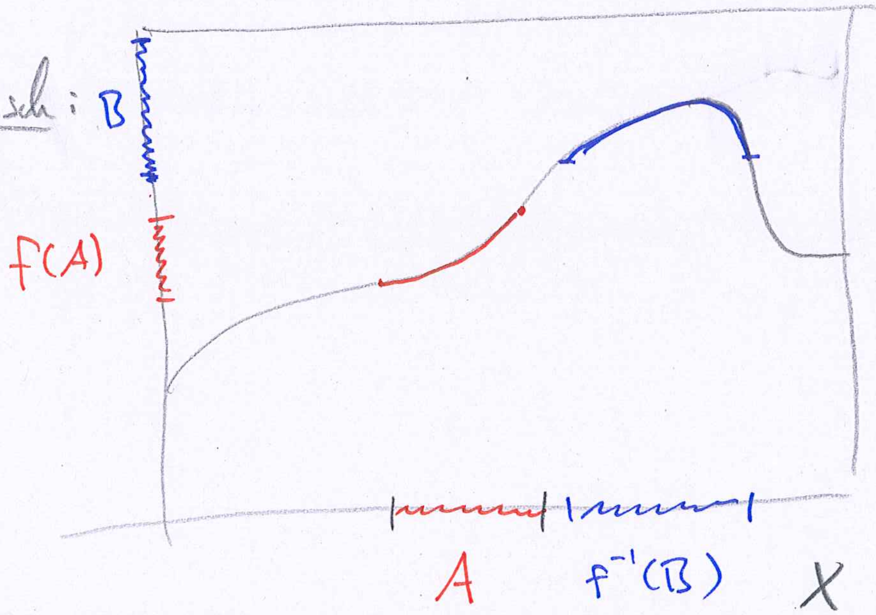
Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung und ist $A \subseteq X$, dann schreibt man kurz

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq Y \qquad \underline{\text{Bild von } A}$$

Für $B \subseteq Y$ schreibt man kurz

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \qquad \underline{\text{Urbild von } B}$$

Schematisch:



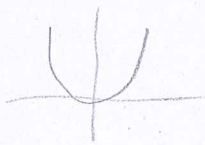
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

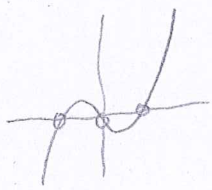
bijektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

Beispiele



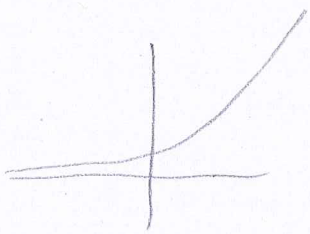
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

weder injektiv noch surjektiv



$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$

surjektiv, nicht injektiv



$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$

injektiv, nicht surjektiv

5. Komposition von Abbildungen und Inverse

Wenn $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$

Abbildungen sind, dann definiert man

ihre Komposition (Hintereinanderausführung)

als

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\quad g\circ f \quad} Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Lies: "g nach f" und beachte die Reihenfolge!

Auf jeder (nicht leeren) Menge X gibt es eine besondere Abbildung, nämlich die <u>Identität</u> oder <u>identische Abbildung</u>, die einfach definiert ist durch

$$\begin{aligned} id_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine beliebige Abbildung, so gilt offensichtlich

$$id_Y \circ f = f$$
$$f \circ id_X = f$$

Angenommen, $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} X$ sind Abbildungen zwischen Mengen X und Y.

Dann nennen wir g eine

<u>Rechtsinverse</u> zu f, falls $f \circ g = id_Y$

<u>Linksinverse</u> zu f, falls $g \circ f = id_X$

<u>Inverse</u> zu f, falls $g \circ f = id_X$ <u>und</u> $f \circ g = id_Y$

Jetzt beweisen wir ein paar einfache Sachen

6. <u>Lemma A</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $X \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv

(ii) f hat eine Linksinverse

<u>Beweis</u> <u>Zeige (i) $\Rightarrow$ (ii)</u>

Wähle $z \in X$ beliebig. Wir definieren $g: Y \to X$ wie folgt.

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{falls } f(x) = y \text{ gilt} \\ z & \text{falls es kein } x \in X \text{ mit } f(x) = y \text{ gibt} \end{cases}$$

Da es zu jedem $y \in Y$ nach Annahme höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, können wir g so definieren (g ist "wohl definiert").

Für ein beliebiges $x \in X$ gilt nun

$$g(f(x)) = x \quad , \text{ also } \quad g \circ f = id_X \; .$$

Zeige (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei g ein Linksinverse.

Angenommen, $u, v \in X$ und $u \neq v$. Dann gilt $u = g(f(u)) \neq v = g(f(v))$, also folgt $f(u) \neq f(v)$. Das bedeutet aber genau, dass f injektiv ist.

$\square$

"Lemma" ist griechisch und bedeutet "Aufgegriffenes". In der Mathematik ist ein Lemma ein Hilfsatz.

Der Kasten $\square$ heißt, dass der Beweis fertig ist (wie "QED").

Der Folgepfeil "$\alpha \Rightarrow \beta$" bedeutet: wenn die Aussage α wahr ist, dann ist auch die Aussage β wahr.

"α und β sind äquivalent" bedeutet: α ist genau dann wahr, wenn β wahr ist,

<u>Lemma B</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.
Dann sind äquivalent:
(i) f ist surjektiv
(ii) f hat eine Rechtsinverse.

<u>Beweis</u> <u>Zeige (i) => (ii)</u>. Sei also f surjektiv.
Zu jedem $y \in Y$ gibt es dann mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir wählen zu jedem y ein solches x und setzen $g(y) = x$.
Dann gilt nach Konstruktion $f(g(y)) = f(x) = y$, also ist g eine Rechtsinverse.

<u>Zeige (ii) => (i)</u>. Sei g eine Rechtsinverse.
Für jedes $y \in Y$ gilt dann $f(g(y)) = y$, also hat $g(y)$ als Bild (unter f) genau das Element y, d.h. y hat mindestens ein Urbild. $\square$

<u>Bemerkung</u> Das Lemma B ist tiefer, als es aussieht. Im Beweis (i) => (ii) haben wir zu jedem $y \in Y$ ein Urbild "gewählt." Dass man das tun kann, ist ein wichtiges

Prinzip der Mengenlehre, das sogenannte "Auswahlaxiom". Tatsächlich ist Lemma B äquivalent zu diesem mengentheoretischen Prinzip. Dazu später mehr.

<u>Lemma C</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Wenn f eine Linksinverse $g: Y \to X$ und eine Rechtsinverse $h: Y \to X$ hat, so gilt $g = h$ und f ist bijektiv.

<u>Beweis</u> Nach Voraussetzung gilt

$$f \circ h = id_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = id_X$$

also $g(y) = \underbrace{g(f}(h(y))) = h(y)$ für alle $y \in Y$.

Das bedeutet aber genau, dass $g = h$ gilt.

□

<u>Korollar</u> Eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ hat genau eine Inverse.

<u>Beweis</u> Angenommen, g und h sind Inverse zu f. Dann ist insbesondere g eine Rechtsinverse und h eine Linksinverse, nach Lemma C also $g = h$

□

"Corollarium" ist Latein und bedeutet Zugabe, Geschenk. Ein Korollar ist ein Satz, der aus dem vorher Bewiesenen so leicht folgt, dass man nichts oder nur wenig zum Beweis sagen muss.

7. <u>Lemma</u> (Cantor) Sei X eine Menge. Dann gibt es keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$.

<u>Beweis</u> Sei $f: X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv sein kann. Die Abbildung f ordnet jedem $x \in X$ eine Teilmenge $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ zu.

Setze nun $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

<u>Beh:</u> Es gibt kein $x \in X$ mit $f(x) = A$.

Für $x \in A$ ist $x \notin f(x)$, also $f(x) \neq A$.

Für $x \in X - A$ ist $x \in f(x)$, also $f(x) \neq A$. $\square$

<u>Korollar</u> Für keine Menge X gibt es eine bijektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$. $\square$

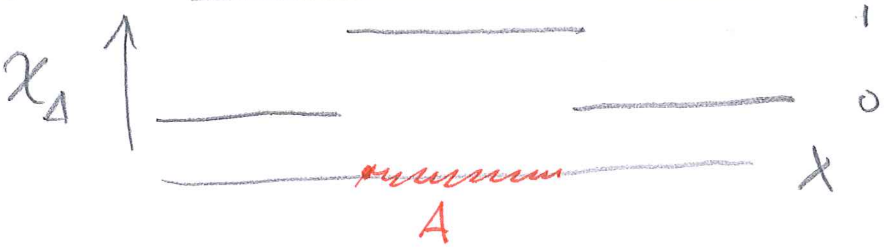
Cantors Lemma sagt, dass $\mathcal{P}(X)$ "viel mehr" Elemente hat als X. Wir sehen das gleich genauer. Dazu betrachten wir $\mathcal{P}(X)$ unter einem etwas anderen Blickwinkel.

8. <u>Charakteristische Funktionen</u>

Sei X eine Menge und sei $A \subseteq X$. Wir definieren eine Abbildung $\chi_A : X \to \{0,1\}$ durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Man nennt χ_A die <u>charakteristische Funktion</u> von A



Offensichtlich gilt $\chi_A = \chi_B$ für $A, B \subseteq X$ genau dann, wenn $A = B$ gilt.

Ist $f: X \to \{0,1\}$ irgend eine Abbildung, so ist $f = \chi_A$ mit $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, d.h. jede Abbildung $X \to \{0,1\}$ ist eine charakteristische Funktion (einer eindeutigen Teilmenge $A \subseteq X$).

Ist $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge mit n Elementen (d.h. $x_j \neq x_k$ für $j \neq k$), so gibt es offensichtlich genau

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n \text{ Abbildungen } X \to \{0,1\},$$

denn für jedes x_j gibt es zwei mögliche Funktionswerte. Wegen der Entsprechung zwischen solchen Funktionen und Teilmengen von X folgt: die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ hat genau 2^n Elemente. #

9. Endliche und unendliche Mengen

Man nennt eine Menge X <u>endlich</u>, wenn es eine bijektive Abbildung $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \xrightarrow{\xi} X$ gibt. Dann gilt $X = \{\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n)\}$ und $\xi(i) \neq \xi(j)$ für $i \neq j$. Man sagt auch, X hat <u>Mächtigkeit</u> / <u>Kardinalität</u> / <u>Länge</u> n (n ist eine natürliche Zahl) und schreibt $\# X = n$ (oder $|X| = n$ oder $\mathrm{card}(X) = n$). Es gilt insbesondere $\# X = 0$ genau dann, wenn $X = \emptyset$.

Eine Menge X heißt <u>unendlich</u>, falls sie nicht endlich ist. Beispiele für unendliche Mengen sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

G. Cantor entdeckte als erster, dass es "unterschiedlich große" unendliche Mengen gibt.

<u>Definition</u> Eine Menge X heißt <u>abzählbar</u>, wenn es eine injektive Abbildung $X \to \mathbb{N}$ gibt. Offensichtlich ist jede endliche Menge abzählbar, aber zum Beispiel ist auch $\mathbb{N}$ abzählbar. Teilmengen von abzählbaren Mengen sind auch abzählbar: ist $A \subseteq X$ und ist $f: X \to \mathbb{N}$ injektiv, so ist auch

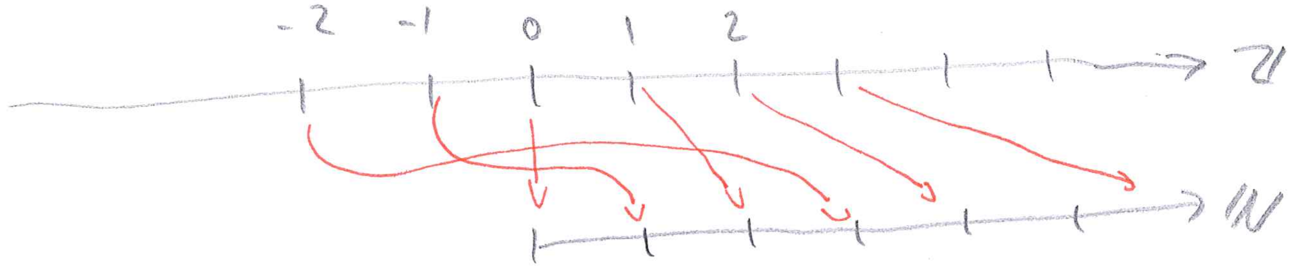
$$\begin{aligned} A &\to \mathbb{N} \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

injektiv.

<u>Beispiele</u>

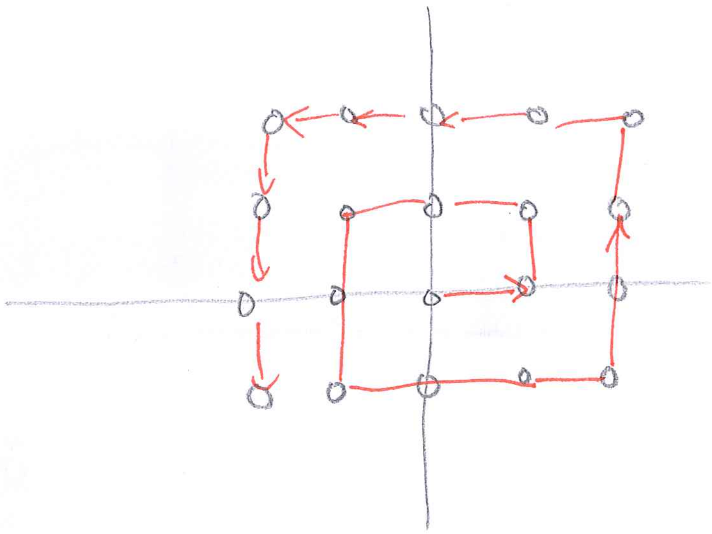
<u>$\mathbb{Z}$ ist abzählbar:</u> definiere $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -(2z+1) & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$



<u>$\mathbb{Q}$ ist abzählbar</u>

<u>Idee</u> Jedes $q \in \mathbb{Q}$ läßt sich eindeutig als gekürzter Bruch $q = \frac{a}{b}$ schreiben mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ und $b \geq 1$. Bilde q ab auf das Paar $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definiere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ wie im Bild dargestellt



<u>Lemma</u> Eine unendliche Menge X ist genau dann abzählbar (man sagt: <u>abzählbar unendlich</u>), wenn es eine bijektive Abbildung $g: X \to \mathbb{N}$ gibt.

<u>Beweis</u> Wenn es solch eine bijektive Abbildung g gibt, so ist X nach Definition abzählbar.

Angenommen, $f: X \to \mathbb{N}$ ist injektiv.
Dann ist $f(X) = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ mit

mit $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Definiere $h : f(X) \to \mathbb{N}$, $n_j \longmapsto j$. Dann ist $g = h \circ f : X \to \mathbb{N}$ bijektiv. $\square$

Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt <u>überabzählbar</u>.

<u>Korollar</u> Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht überabzählbar.

<u>Beweis</u> Nach §0.7 Korollar gibt es <u>keine</u> bijektive Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$. $\square$

10. <u>Theorem</u> (Cantor) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

<u>Beweis</u> Wir konstruieren eine injektive Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{h} \mathbb{R}$. Da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist, kann dann $\mathbb{R}$ auch nicht abzählbar sein.

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ mit charakteristischer Funktion χ_A, so definieren wir

$$h(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_A(j) \cdot 10^{-j}$$

d.h. wir lesen die Folge der 0 und 1

$\chi_A(0), \chi_A(1), \chi_A(2), \ldots$ als Dezimaldarstellg. einer reellen Zahl mit (unendlich vielen Nachkommastellen). Für verschiedene Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ erhalten wir so verschiedene reelle Zahlen $h(A), h(B)$, also ist $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injektiv. $\square$

Einschub p. $26\frac{1}{2}$

11. Folgen und Familien

Ist X irgendeine Menge und $\xi: \mathbb{N} \to X$ eine Abbildung, dann schreibt man auch

$$\xi(j) = \xi_j \quad \text{und} \quad \xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

und nennt $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge (von Menge)(in X). In der Analysis hat man es zum Beispiel viel mit Folgen von reellen Zahlen zu tun, d.h. $\xi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$.

Man nennt dann $\mathbb{N}$ auch die Indexmenge der Folge.

Allgemein sagt man, zwei Mengen haben die selbe Mächtigkeit oder Kardinalität (oder Länge), wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.

Wir haben gesehen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ haben die selbe Mächtigkeit, aber $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ haben nicht die selbe Mächtigkeit.

Ist J irgendeine (nicht leere) Menge und $\xi : J \to X$ eine Abbildung, so schreibt man auch $\xi_j = \xi(j)$ und $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ und nennt $(\xi_j)_{j\in J}$ eine <u>Familie</u> von Mengen, mit <u>Indexmenge</u> J.

Dabei kann J endlich oder unendlich sein. #

Falls J endlich ist, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, so nennt man $(\xi_j)_{j\in J}$ auch ein <u>n-Tupel</u> und schreibt $(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_n})$

Paar = 2-Tupel

Tripel = 3-Tupel usw.

12. <u>Beliebige Vereinigungen</u>

Ist X eine Menge, so setzt man

$$\bigcup X = \{ a \mid \text{es gibt ein } A \in X \text{ mit } a \in A \}$$

<u>Vereinigung</u> von X

<u>Idee</u>: die Elemente aller Elemente von X.

Bsp $\bigcup\{P,Q\} = P \cup Q$ $\bigcup\{P\} = P$

$\bigcup \emptyset = \emptyset$ (P, Q, R sind Mengen)

$\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$

$\bigcup\{P, \{Q\}, \{\{R\}\}\} = P \cup \{Q\} \cup \{\{R\}\}$

Ist $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen, schreibt man $\bigcup_{j\in J} X_j = \bigcup\{X_j \mid j \in J\}$

$= \{x \mid \text{es gibt ein } j\in J \text{ mit } x \in X_j\}$

13. Beliebige kartesische Produkte

Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen.

Das kartesische Produkt $\prod_{j\in J} X_j$ besteht aus allen Familien $(\xi_j)_{j\in J}$ mit

$\xi_j \in X_j$

Falls J endlich ist, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$

schreibt man auch

$$\prod_{j\in J} X_j = \prod_{j=1}^{n} X_j = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

Die Elemente schreibt man dann als

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad , \quad \xi_j \in X_j$$

und nennt sie <u>n-Tupel</u>.

Ist zusätzlich $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, so

schreibt man auch $\prod_{j=1}^{n} X_j = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ Faktor}} = X^n$

<u>Beispiel</u> $\mathbb{R}^n$ besteht aus n-Tupeln von reellen Zahlen $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

14. <u>Beliebige Durchschnitte</u>

Ist X eine nicht leere Menge, so setzt man

$$\bigcap X = \{ a \mid \text{für alle } A \in X \text{ gilt } a \in A \}$$

<u>Durchschnitt</u> von X

Idee: wir sammeln alle Elemente, die in allen Elementen von X vorkommen

$\bigcap\{P,Q\} = P\cap Q \qquad \bigcap\{P\} = P$

$\bigcap\{P,\{Q\},\{\{R\}\}\} = P\cap\{Q\}\cap\{\{R\}\}$

Ist $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen, schreibt man

$$\bigcap_{j\in J} X_j = \bigcap\{X_j \mid j\in J\}$$
$$= \{a \mid \text{für alle } j\in J \text{ gilt } a\in X_j\}$$

Jetzt beweisen wir noch ein paar Ergebnisse über endliche Mengen.

15. <u>Lemma A</u>

Es seien X und Y endliche Mengen und $f: X\to Y$ eine surjektive Abbildung. Wenn $\#X \leq \#Y$ gilt, dann ist f bijektiv und es gilt $\#X = \#Y$.

<u>Beweis</u> Wir setzen $m = \# X$ und $n = \# Y$ sowie $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Dann nimmt f höchstens m verschiedene Werte an, nämlich $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_m)$. Nach Annahme gilt $Y = \{f(\xi_1), \dots, f(\xi_m)\}$, also gilt $m \geq n$. Es folgt $n = m$. Wenn f einen Wert mehrfach annimmt, hätten wir $m > n$, im Widerspruch zu $m \leq n$. Also ist f injektiv und damit bijektiv.

<u>Lemma B</u> Seien X und Y endliche Mengen und $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Wenn $\# X \geq \# Y$ gilt, dann ist f bijektiv und $\# X = \# Y$.

<u>Beweis</u> Sei $\# X = m$ und $\# Y = n$, sowie $X = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Da f injektiv ist, hat die Menge $\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_m)\}$ m Elemente. Sie ist in Y enthalten, also gilt $m \leq n$, folglich (wegen $m \geq n$) gilt $m = n$ und $Y = \{f(\xi_1), \dots, f(\xi_m)\}$, d.h. f ist surjektiv. □

<u>Korollar</u> Es seien X und Y endliche Mengen mit $\#X = \#Y$ und es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist bijektiv
(ii) f ist injektiv
(iii) f ist surjektiv

$\square$

<u>Bem</u>: Für unendliche Mengen ist das im Allgemeinen falsch!

<u>Bsp</u>: $X = Y = \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ x-1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist surjektiv, aber <u>nicht</u> injektiv (der Wert 0 wird zweimal angenommen, $f(0) = f(1) = 0$)

$g(x) = 2x$ ist injektiv, aber <u>nicht</u> surjektiv, der Wert 1 wird nie angenommen.

16. Permutationen

Es sei X eine nicht leere Menge. Eine bijektive Abbildung $f: X \to X$ nennt man auch eine Permutation von X (permutare: lat. vertauschen). Die Menge aller Permutationen von X bezeichnet man mit $Sym(X)$,

$$Sym(X) = \{ f: X \to X \mid f \text{ bijektiv} \}$$

Satz Ist X endlich (und nicht leer) mit $\#X = m$, so gibt es genau $m!$ Permutationen von X, $\#Sym(X) = m!$

Dabei definiert man $m!$ rekursiv durch

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$(k+1)! = k!(m+1)$$

Für $k \geq 1$ ist also $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot k$

<u>Beweis</u> Nach § 0.15 müssen wir nur überlegen, wie viele verschiedene injektive Abbildungen $f: X \to X$ es gibt. Sei $X = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Für den Wert $f(\xi_1)$ gibt es m Möglichkeiten. Da f injektiv sein soll, bleiben dann für $f(\xi_2)$ nur noch $(m-1)$ Möglichkeiten, für $f(\xi_3)$ nur noch $(m-2)$ Möglichkeiten, usw. Insgesamt haben wir so $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = m!$ Möglichkeiten, eine injektive Abbildung anzugeben. $\square$

<u>Bemerkung</u> Ist X eine nicht leere Menge, so hat $\mathrm{Sym}(X)$ zusätzliche Struktur. Sind nämlich $f, g \in \mathrm{Sym}(X)$, so ist auch $f \circ g \in \mathrm{Sym}(X)$ (die Komposition von bijektiven Abbildungen ist bijektiv). Weiter gilt $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Sym}(X)$ (klar) und zu jedem $f \in \mathrm{Sym}(X)$ gibt es ein $g \in \mathrm{Sym}(X)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_X = g \circ f$ (die Umkehrabbildung von f)

\#

Es gelten also folgende Rechenregeln für alle $f,g,h \in \mathrm{Sym}(X)$:

(i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (Assoziativgesetz)

(ii) $f \circ id_X = id_X \circ f = f$ (es gibt ein Neutralelement)

(iii) zu jedem $f \in \mathrm{Sym}(X)$ gibt es ein $g \in \mathrm{Sym}(X)$ mit $f \circ g = id_X = g \circ f$ (Existenz von Inversen)

Das sind genau die Axiome einer Gruppe, $\mathrm{Sym}(X)$ bildet eine Gruppe, die Symmetrische Gruppe von X. Wir kommen darauf zurück.

Wir betrachten zum Schluss dieses Kapitels noch zwei wichtige Beweisprinzipien. Das eine ist das Induktionsprinzip

17. Prinzip der vollständigen Induktion

(I) Angenommen, $A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \in A$

(ii) für jedes $n \in A$ gilt: $n+1 \in A$

Dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Anschauung: alle natürlichen Zahlen erreicht man irgendwann, wenn man anfängt bei 0 zu zählen.

Das Induktionsprinzip wird oft in Beweisen benutzt um zu zeigen, dass eine bestimmte Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: man zeigt zuerst, dass die Aussage für $n=0$ stimmt (Induktionsanfang) und dann, dass sie (Induktionsschritt) für $n+1$ stimmt, falls sie für n stimmt. Nach (I) stimmt die Aussage dann für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

Lemma Für jeden $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis Induktionsanfang: für $n=0$ stimmt diese Formel $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Wenn die Formel für n stimmt, dann stimmt sie auch für $n+1$. Denn

$$\sum_{j=0}^{n+1} j = \sum_{j=0}^{n} j + (n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind. Annahme}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechnen}}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square$$

Damit stimmt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Es gibt zwei nützliche Varianten von (I).

(I') Angenommen, $A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \in A$

(ii) Falls für alle $m < n$ gilt $m \in A$, so gilt auch $n \in A$.

Dann gilt $A = \mathbb{N}$.

(I') folgt aus (I), denn: sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge, die (i) und (ii) aus (I') erfüllt. Setze $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid m \in A \text{ für alle } m \leq n \}$. Dann gilt $0 \in B$. Wenn gilt $n \in B$, so gilt $m \in A$ für alle $m \leq n$, also gilt dann $n+1 \in A$ und damit auch $n+1 \in B$. Es folgt $B = \mathbb{N}$. Wegen $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$ folgt daraus $A = \mathbb{N}$. □

Die zweite Variante von (I) ist

(M) Jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element $a \in A$, d.h. für alle $x \in A$ gilt $a \leq x$.

(M) folgt aus (I'), denn: sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, die kein kleinstes Element hat. Betrachte $B = \mathbb{N} - A$. Da 0 die kleinste natürliche Zahl ist, folgt $0 \in B$ (denn $0 \notin A$). Wenn für alle $m < n$ gilt $m \in B$, so ist $n \notin A$, sonst wäre n das kleinste Element von A. Also gilt $n \in B$. Es folgt $B = \mathbb{N}$ und damit $A = \emptyset$, nur die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ hat kein kleinstes Element. □

<u>Bemerkung</u>: Aus (M) folgt wiederum (I).
Ist nämlich $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge, die (i) und (ii) in (I) erfüllt, so betrachte $B = \mathbb{N} - A$. Wenn B nicht leer ist, so gibt es ein kleinstes Element $b \in B$. Wegen (i) gilt außerdem $b > 0$. Folglich ist $b-1 \in A$, dann ist aber auch $b \in A$ nach (ii), ein Widerspruch.
Deswegen ist $B = \emptyset$, d.h. $A = \mathbb{N}$. $\square$

18. <u>Das Auswahlaxiom</u>

Das Auswahlaxiom ist ein wesentliches Axiom (eine Grundannahme) der Mengenlehre. Es besagt folgendes: ist X eine nicht leere Menge und ist $P = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$ die Menge aller nicht leeren Teilmengen von X, dann gibt es eine <u>Auswahlfunktion</u>

$$c : P \to X$$

die jeder Menge $A \in P$ ein Element $c(A) \in A$ zuordnet

Wir haben das im Beweis von Lemma B in §0.6 benutzt, als wir zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gewählt haben mit $f(x) = y$. Eine andere Konsequenz des Auswahlaxioms ist folgender Satz.

<u>Satz</u> Ist $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie nichtleerer Mengen, dann ist $\prod_{j \in J} X_j$ nicht leer.

<u>Beweis</u> Sei $X = \bigcup_{j \in J} X_j$, sei $P = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$

und sei $c : P \to X$ eine Auswahlfunktion. Nach Voraussetzung gilt $X_j \in P$ für alle $j \in J$.

Sei $\xi_j = c(X_j)$. Dann gilt $\xi_j \in X_j$ für jedes $j \in J$, also $(\xi_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$ $\square$

Das Kapitel über Grundlagen ist damit zu Ende. Wir haben hier nur sogenannte "naive Mengenlehre" betrieben. In der mathematischen Logik werden diese Begriffe präzisiert – aber das wäre im 1. Semester zu abstrakt.

Es ist wichtig, mit Mengen sauber zu hantieren. 1901 wies B. Russel darauf hin, dass allzu naive Konstruktionen von Mengen auf Widersprüche führen, indem er die "Russel-Menge" vorschlug:

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Das Problem damit ist, dass weder $R \in R$ noch $R \notin R$ wahr sein können!

Die Auflösung dieser Paradoxie ist, dass R keine Menge ist – sie läßt sich nicht mit den von uns beschriebenen Konstruktionsverfahren bilden.

#