9. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Antoine Beljean

Aufgabe 9.1 (2+2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Liegruppen isomorph sind (als Liegruppen).
(1) $\mathrm{U}_1\mathbb{H} \cong \mathrm{SU}(2)$.
(2) $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathbf{1}\}$.

Sei K ein Körper. Auf K^{2m} mit Standardbasis $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m$ definieren wir eine Bilinearform ω durch

$$\omega(e_j, f_j) = 1 = -\omega(f_j, e_j) \text{ für } j = 1, 2, \ldots, m$$

und $\omega = 0$ auf den restlichen Paaren. Die *symplektische Gruppe* ist

$$\mathrm{Sp}_{2m}(K) = \{g \in \mathrm{GL}_{2m}(K) \mid \omega(u,v) = \omega(gu, gv) \text{ für alle Vektoren } u, v\}$$

Aufgabe 9.2 (2+2 Punkte)
Zeigen Sie:
(1) $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ sind Liegruppen.
(2) $\mathrm{SO}(2m) \cap \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(m)$.
Hinweis: Betrachten Sie für (2) die Gram-Matrix von ω.

Aufgabe 9.3 (2+2 Punkte)
Bestimmen Sie die reellen Dimensionen der folgenden Liealgebren.
(1) $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$.
(2) $\mathfrak{so}(m)$, $\mathfrak{su}(m)$, $\mathfrak{u}(m)$, $\mathfrak{u}_m(\mathbb{H})$.

Aufgabe 9.4 (1+1+3+1 Punkte)
Die Gruppe $\mathrm{SO}(m)$ wirkt auf der Liealgebra $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$ durch Konjugation. Wir versehen $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle X|Y\rangle = \mathrm{tr}(X^TY) = \sum_{j,k} X_{jk}Y_{jk}$. Zeigen Sie:
(1) Die Wirkung von $\mathrm{SO}(m)$ auf $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$ ist orthogonal bezüglich $\langle -|-\rangle$.
(2) Die Unter-Liealgebra $\mathfrak{so}(m)$ ist invariant unter der Wirkung von $\mathrm{SO}(m)$.
(3) Der Untervektorraum $\mathfrak{p} = \mathfrak{so}(m)^\perp$ enthält keinen echten $\mathrm{SO}(m)$-invarianten Teilraum.
(4) $\mathfrak{so}(m)$ ist eine maximale Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{R})$.
Hinweis: Zeigen Sie für (3), dass der Untervektorraum $\mathfrak{p}$ aus den spurlosen symmetrischen Matrizen besteht und dass jede Matrix in $\mathfrak{p}$ unter $\mathrm{SO}(m)$ konjugiert ist zu einer Diagonalmatrix.

Abgabe bis: Donnerstag, den 13.12.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.