8. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Antoine Beljean

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)
Es sei G eine Liegruppe. Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel TG trivial ist. Genauer: es gibt einen Diffeomorphismus $\phi : G \times T_eG \longrightarrow TG$ so, dass gilt $\phi(p, X_e) \in T_pG$ und so, dass $\phi(p, -) : T_eG \longrightarrow T_pG$ eine bijektive lineare Abbildung ist.

Hinweis: Schreiben Sie mit linksinvarianten Vektorfeldern eine explizite Abbildung und Umkehrabbildung hin.

Aufgabe 8.2 (2+1+1) Punkte)
Zeigen Sie:
(1) Es gibt keine Verknüpfung $\cdot$ auf $\mathbb{S}^2$ so, dass $(\mathbb{S}^2, \cdot)$ eine Liegruppe ist.
(2) Es gibt für $m = 1, 3$ Verknüpfungen auf $\mathbb{S}^m$ so, dass $(\mathbb{S}^m, \cdot)$ eine Liegruppe ist.

Hinweis: Übungsblatt 7.

Aufgabe 8.3 (1+1+1+1) Punkte)
Es sei $\mathbb{H}$ der Quaternionenschiefkörper aus Übungsaufgabe 7.2. Weiter sei $S = \{a \in \mathbb{H} \mid ||a|| = 1\}$. Ein Element $q \in \mathbb{H}$ heisst *rein*, falls $q^2 = \lambda\mathbf{1}$ gilt für ein $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. Zeigen Sie:
(1) S ist eine Untergruppe der Einheitengruppe $\mathbb{H}^*$.
(2) Die reinen Elemente bilden einen 3-dimensionalen reellen Untervektorraum $P \subseteq \mathbb{H}$, den wir mit $\mathbb{R}^3$ identifizieren.
(3) Die Abbildung $\psi : S \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$, $\psi(a)(v) = ava^{-1}$ ist ein Homomorphismus mit Kern $\{\pm\mathbf{1}\}$.
(4) ψ is surjektiv.

Hinweis: überlegen Sie, was Sie in Teil (3) alles prüfen müssen. Verwenden Sie für (4) den Satz von Cartan-Dieudonné auf Blatt 7 in folgender Variante. Jedes Element $g \in \mathrm{SO}(3)$ ist Produkt von zwei Abbildungen der Form $-\sigma$, wobei σ eine Spiegelung ist (warum?).

Aufgabe 8.4 (1+3) Punkte)
Für diese Aufgabe identifizieren wir $\mathbb{H}$ als normierten reellen Vektorraum mit $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie:
(1) Die Abbildung $\phi : S \times S \longrightarrow \mathrm{SO}(4)$, $\phi(a, b)(v) = avb^{-1}$ ist ein Homomorphismus mit Kern $\{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$.
(2) ϕ is surjektiv.

Hinweis: Überlegen Sie wieder, was Sie in Teil (1) alles prüfen müssen. Verwenden Sie für (2), dass $S \times S$ durch ϕ transitiv auf $S \subseteq \mathbb{H}$ wirkt, sowie Übungsaufgabe 8.3.

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Es gibt einen stetigen surjektiven Homomorphismus $\mathrm{SO}(4) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$.

Hinweis: Benutzen Sie die in 8.3 und 8.4 gewonnenen Ergebnisse sowie den Homomorphiesatz.

Abgabe bis: Donnerstag, den 6.12.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.