6. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Antoine Beljean

Auf diesem Blatt beschäftigen wir uns mit 'eigenartigen' Untergruppen und Isomorphismen.

Aufgabe 6.1 (2+2 Punkte)
Es sei G eine lokalkompakte Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von abzählbarem Index, $[G : H] \leq \aleph_0$. Zeigen Sie:

(1) Wenn H abgeschlossen ist, dann ist H offen.
(2) Die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ besitzt Untergruppen von abzählbar unendlichem Index.

Hinweis zu (2): Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und benutzen Sie den Basisergänzungssatz.

Aufgabe 6.2 (2+2 Punkte)
Es sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe und $\mathrm{Tor}(A) = \{a \in A \mid \mathrm{ord}(a) < \infty\}$. Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{Tor}(A)$ ist eine Untergruppe.
(2) $\mathrm{Tor}(A/\mathrm{Tor}(A)) \cong \{0\}$.

Aufgabe 6.3 (2+2 Punkte)
Wir betrachten die Kreisgruppe $\mathbb{S}^1$ als Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$. Zeigen Sie:

(1) Es gibt einen Isomorphismus von topologischen Gruppen

$$\mathbb{C}^* \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}.$$

(2) $\mathrm{Tor}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Tor}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.4 (1+2+1 Punkte)
Zeigen Sie:

(1) Es gibt einen Isomorphismus von topologischen Gruppen $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
(2) Es gibt einen Isomorphismus von abelschen Gruppen $\mathbb{S}^1 \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times V$, wobei V ein überabzählbarer $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.
(3) Es gibt einen Isomorphismus von abelschen Gruppen $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{C}^*$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 22.11.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.