5. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Antoine Beljean

Aufgabe 5.1 (3+1 Punkte)
Es sei G eine topologische Gruppe, mit Neutralelement e. Zeigen Sie.
(1) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ ist abelsch.
(2) Für jedes $g \in G$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, g)$ abelsch.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)
Es sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie: wenn H und G/H zusammenhängend sind, dann ist auch G zusammenhängend.

Aufgabe 5.3 (1+1+1+1 Punkte)
Es sei $\mathrm{O}(n)$ die orthogonale Gruppe, d.h.

$$\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid g^T g = \mathbf{1}\}$$

und es sei $\mathrm{SO}(n)$ die spezielle orthogonale Gruppe,

$$\mathrm{SO}(n) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid g^T g = \mathbf{1} \text{ und } \det(g) = 1\}.$$

Zeigen Sie:
(1) $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind kompakte topologische Gruppen.
(2) Für beide Matrizen-Gruppen ist für $n \geq 2$ der Stabilisator des Vektors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ als topologische Gruppe isomorph zu $\mathrm{O}(n-1)$ bzw. $\mathrm{SO}(n-1)$.
(3) Mit dieser Identifikation erhält man Homöomorphismen $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geq 1$ und $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geq 2$.
(4) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist für alle $n \geq 1$ zusammenhängend und $\mathrm{O}(n)$ hat für alle $n \geq 2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 5.4 (2+2 Punkte)
Für $n \geq 1$ ist die Gruppe $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ zusammenhängend und die Gruppe $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Hinweis: Erinnern Sie sich an das Gram-Schmidt Verfahren bzw. die QR-Zerlegung aus LA II. Verwenden Sie Aufgabe 5.3.

***-Aufgabe** (1+1+1+1 Punkte)
Es sei K eine kompakte Gruppe und X ein Hausdorffraum. Eine Wirkung

$$K \times X \longrightarrow X,$$

$(g,x) \longmapsto gx$ heißt *kompakte Transformationsgruppe*, wenn die Abbildung $K \times X \longrightarrow X$ stetig ist. Es sei weiter $K\backslash X$ die Menge der K-Bahnen in X, und $q : X \longrightarrow K\backslash X$ die Abbildung, die jedem Punkt x seine K-Bahn $K(x)$ zuordnet.

Zeigen Sie: Wenn $K \times X \longrightarrow X$ eine kompakte Transformationsgruppe ist, dann ist $K\backslash X$ in der Quotiententopologie bezüglich q ein Hausdorffraum. Die Abbildung q ist abgeschlossen, offen und eigentlich (dh. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt).

Hinweis: Wallace' Lemma.

Abgabe bis: Donnerstag, den 15.11.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.