3. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Antoine Beljean

Aufgabe 3.1 (1+1+1+1 Punkte)
Es $J \neq \emptyset$ und $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume. Sei $X = \prod_{j \in J} X_j$ ihr Produkt, versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

(1) Für jedes $k \in J$ ist die Projektion $\mathrm{pr}_k : X \longrightarrow X_k$ stetig und offen.
(2) X ist Hausdorffsch genau dann, wenn alle X_j Hausdorffsch sind.
(3) X ist zusammenhängend genau dann, wenn alle X_j zusammenhängend sind.
(4) X ist total unzusammenhängend genau dann, wenn alle X_j total unzusammenhängend sind.

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte)
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der Morphismus $f(t) = (\exp(2\pi it), \exp(2\pi iat))$, für $i = \sqrt{-1}$. Zeigen Sie:

(1) Wenn a rational ist, so ist $\ker(f) \neq \{0\}$ und $\bar{f} : \mathbb{R}/\ker(f) \longrightarrow f(\mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen.
(2) Wenn a irrational ist, so ist $\ker(f) = \{0\}$ und $f(\mathbb{R})$ ist dicht in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Hinweis zu (2): Betrachten Sie das Urbild von $\overline{f(\mathbb{R})}$ unter der Abbilding $q \times q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(u, v) \longmapsto (\exp(2\pi iu), \exp(2\pi iv))$.

Aufgabe 3.3 (2+2 Punkte)
Es sei J eine nichtleere Menge und $A = \bigoplus_J \mathbb{Z}$, versehen mit der diskreten Topologie. Die Elemente von A sind also J-Folgen ganzer Zahlen, deren Folgeglieder fast alle 0 sind. Bestimmen Sie $\widehat{A}$ als abstrakte sowie als topologische Gruppe.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)
Es sei A die additive Gruppe $\mathbb{Q}$, versehen mit der *diskreten* Topologie. Zeigen Sie: $\widehat{\mathbb{Q}}$ ist kompakt und torsionsfrei.

***-Aufgabe** (4 Punkte)
Es sei G eine Gruppe und es sei $\mathbf{M}$ die Menge aller Topologien auf G, für die G eine topologische Gruppe ist. Weiter sei $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$ eine nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie: es gibt genau eine bezüglich $\subseteq$ minimale Topologie $\mathcal{S}$ in $\mathbf{M}$, so dass für alle $\mathcal{T} \in \mathbf{L}$ die Identität $(G, \mathcal{S}) \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ stetig ist. (Man nennt diese Topologie das Supremum der Gruppentopologien in $\mathbf{L}$).

Hinweis. Betrachten Sie die diagonale Abbildung $\mathrm{diag} : G \longrightarrow \prod_{\mathcal{T} \in \mathbf{L}} (G, \mathcal{T})$, *wobei* $\prod_{\mathcal{T} \in \mathbf{L}} (G, \mathcal{T})$ *das Produkt der topologischen Gruppen bezüglich der Topologien in* $\mathbf{L}$ *ist. Versehen Sie* G *mit der entsprechenden Unterraumtopologie* $\mathcal{S}$.

Abgabe bis: Mittwoch, den 31.10.2018, 14 Uhr im Briefkasten 15.