2. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Antoine Beljean

Aufgabe 2.1 (1+1+1+1 Punkte)
Es seien X, Y topologische Räume. Zeigen Sie:

(1) Wenn $A \subseteq X$ zusammenhängend ist, so ist auch $\overline{A} \subseteq X$ zusammenhängend.
(2) Wenn $A \subseteq X$ zusammenhängend und $f : X \longrightarrow Y$ stetig ist, so ist auch $f(A) \subseteq Y$ zusammenhängend.
(3) Wenn X, Y zusammenhängend sind, so ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.
(4) Wenn $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie von zusammenängenden Teilmengen von X ist und wenn gilt $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{j\in J} A_j$ zusammenhängend.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Es sei $n \geq 2$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien Hausdorffräume, mit kompakten Teilmengen $A_k \subseteq X_k$. Beweisen Sie *Wallace's Lemma*: Wenn $W \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ offen ist mit $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq W$, so gibt es offene Mengen $U_k \subseteq X_k$ für $k = 1, \ldots, n$ mit

$$A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq W.$$

Hinweis: betrachten Sie zuerst den Fall $n = 2$.

Aufgabe 2.3 (1+1+1+1 Punkte)
Es sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(1) Wenn G Hausdorff'sch ist und $A \subseteq G$ beliebig, dann ist $\mathrm{Cen}_G(A)$ abgeschlossen.
(2) Wenn $U, X \subseteq G$ nichtleere Teilmengen sind und wenn U offen ist, so sind die Mengen UX und XU offen.
(3) Eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist genau dann offen, wenn sie eine offene nichtleere Teilmenge enthält.
(4) Wenn $A, B \subseteq G$ nichtleere abgeschlossene Teilmengen sind, ist dann AB notwendig abgeschlossen?

Aufgabe 2.4 (2+2 Punkte)
Es sei G eine Hausdorff'sche topologische Gruppe

(1) Wenn $A, B \subseteq G$ nichtleere abgeschlossene Teilmengen sind und wenn A kompakt ist, so ist $AB \subseteq G$ abgeschlossen.
(2) Wenn $K \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe ist, so ist $p : G \longrightarrow G/K$, $p(x) = xK$ abgeschlossen.

Hinweis zu (1): Benutzen Sie Wallace' Lemma.

***-Aufgabe** (2+2 Punkte)
Es sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie folgenden universellen Eigenschaften der Morphismen von topologischen Gruppen

$$p : G \longrightarrow G/G^\circ, \quad p(x) = xg^\circ$$

und

$$q : G \longrightarrow G/\overline{\{e\}}, \quad q(x) = x\overline{\{e\}} :$$

(1) Ist H eine total unzusammenhängende topologische Gruppe und ist

$$f : G \longrightarrow H$$

ein Morphismus von topologischen Gruppen, so gibt es genau einen Morphismus von topologischen Gruppen $\bar{f} : G/G^\circ \longrightarrow H$ mit $\bar{f} \circ p = f$.

(2) Ist H eine Hausdorff'sche topologische Gruppe und ist

$$f : G \longrightarrow H$$

ein Morphismus von topologischen Gruppen, so gibt es genau einen Morphismus von topologischen Gruppen $\bar{f} : G/\overline{\{e\}} \longrightarrow H$ mit $\bar{f} \circ q = f$.

Bemerkung. Sie zeigen damit, dass die Hausdorff'schen topologischen Gruppen bzw. die total unzusammenhängenden Gruppen reflektive Teilkategorien der Kategorie der topologischen Gruppen bilden. Schlagen Sie die nötigen Vokabeln nach!

Abgabe bis: Donnerstag, den 25.10.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.