10. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Antoine Beljean

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)
Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass der Graph von f

$$L = \{(p, f(p)) \mid p \in M\} \subseteq M \times N$$

eine abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 10.2 (3+1 Punkte)
Es sei G eine lokalkompakte zusammenhängende Gruppe. Zeigen Sie, dass es zu jeder kompakten Einsumgebung $C \subseteq G$ eine abzählbare Menge $Y \subseteq G$ gibt mit $G = YC$. Geben Sie ein Beispiel einer nicht zusammenhängenden lokalkompakten Gruppe G an, wo dies nicht gilt.

Aufgabe 10.3 (3+1 Punkte)
Es sei $h : M \longrightarrow N$ eine bijektive glatte Immersion. Zeigen Sie: h ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn h eine Submersion ist. Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven glatten Immersion an, die keine Submersion ist.

Aufgabe 10.4 (1+1+1+1 Punkte)
Es sei P die Menge aller reellen symmetrischen positiv definiten $m \times m$-Matrizen mit Determinante 1. Zeigen Sie:

(i) P ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des Vektorraumes der symmetrischen reellen Matrizen.
(ii) Die Wirkung von $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ auf P durch $g(p) = gpg^T$ ist transitiv.
(iii) Diese Wirkung $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) \times P \longrightarrow P$ ist eine Lie-Transformationsgruppe.
(iv) Es gibt einen Diffeomorphismus $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(m) \longrightarrow P$.

Hinweis. Zeigen Sie für (i) zuerst (zum Beispiel mit mit Minoren), dass die Menge aller positiv definiten Matrizen offen ist in der Menge der symmetrischen Matrizen. Für (ii) können Sie das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen.

***-Aufgabe** (2+2 Punkte)
Es sei $h : M \longrightarrow N$ eine surjektive glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(1) h ist eine Submersion.
(2) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung W von $q = h(p)$ und eine glatte Abbildung $s : W \longrightarrow M$ mit $s(q) = p$ und $h \circ s = \mathrm{id}_W$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 20.12.2018, 8 Uhr im Briefkasten 15.