

## 6. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(Abgabe: bis Freitag 22.01.2016, 12:30 Uhr in der Übung)

### Aufgabe 6.1 \*

Sei  $(X, d_X)$  ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0) Raum. Sei weiter  $x_0 \in X$  beliebig. Wir definieren die Menge

$$\tilde{X}_{x_0} = \{c : [0, 1] \rightarrow X \mid c \text{ l. u. lokale Geodäte mit } c(0) = x_0\} \cup \{c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X \mid c_{x_0}(t) = x_0, t \in [0, 1]\}$$

Weiter definieren wir auf der Menge  $\tilde{X}_{x_0}$  eine Metrik durch:

$$d(c_1, c_2) := \sup \{d_X(c_1(t), c_2(t)) \mid t \in [0, 1]\}$$

für  $c_1, c_2 \in \tilde{X}_{x_0}$  beliebig.

Zeigen Sie, dass die l.u. lokalen Geodäten in  $\tilde{X}_{x_0}$  stetig von ihren Endpunkten abhängen.

*Hinweis:* §2.32. Technisches Lemma.

### Aufgabe 6.2 \*

Wir betrachten den folgenden metrischen Raum

$$X := \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$

mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass  $X$  versehen mit der induzierten Längmetrik ein CAT(0) Raum ist.

*Hinweis:* §2.44. Alexandrovs Lemma + §2.46. Winkelbedingung für CAT(0) Räume

### Aufgabe 6.3 \*

Wir betrachten den folgenden metrischen Raum

$$Y := \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$$

mit der euklidischen Metrik. Zeigen Sie, dass  $Y$  versehen mit der induzierten Längmetrik kein CAT(0) Raum ist.

*Hinweis:* Betrachten Sie das Dreieck  $\Delta((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  in  $Y$ .

### Aufgabe 6.4 \*

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $c_1, c_2, c_3$  Geodäten in  $X$  mit  $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0)$ . Zeigen Sie, dass gilt:

$$\angle(c_1, c_3) \leq \angle(c_1, c_2) + \angle(c_2, c_3).$$