5. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(**Abgabe:** bis Freitag 8.01.2016, 12:30 Uhr in der Übung)

Aufgabe 5.1

(i) Sei (X, d) ein Längenraum und $x, y \in X, x \neq y$. Zeigen Sie, dass für alle $r < d(x, y)$ gilt:

$$d(x, B_r(y)) = d(x, y) - r$$

(ii) Gilt die Aussage (i) auch für beliebige metrische Räume?

Aufgabe 5.2

Seien X, Y metrische Räume und $p : Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Zeigen Sie, dass p die eindeutige Liftungseigenschaft hat: Für jede stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ und stetige Abbildungen $f, g : [0, 1] \to Y$ mit $p \circ f = p \circ g = c$ und $f(0) = g(0)$ gilt: $f(t) = g(t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $S := \{t \in [0, 1] \mid f(t) = g(t)\}$ und zeigen Sie, dass S nichtleer, offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 5.3 *

Sei X ein eindeutig geodätischer Raum und $x, y \in X$ beliebig. Seien weiter $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. Sei weiter γ_n die Geodäte von x_n nach y_n und γ die Geodäte von x nach y. Wir definieren

$$\gamma_n' : [0, 1] \to X$$

$$t \mapsto t \cdot d(x_n, y_n) \mapsto \gamma_n(t \cdot d(x_n, y_n))$$

und

$$\gamma' : [0, 1] \to X$$

$$t \mapsto t \cdot d(x, y) \mapsto \gamma(t \cdot d(x, y))$$

Zeigen Sie, dass gilt: γ_n' konvergiert gleichmäßig gegen γ' genau dann, wenn γ_n' punktweise gegen γ' konvergiert.

Hinweis: Seite 65 im Skript.

Aufgabe 5.4 *

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Längenraum ist, wenn X ungefähre Mittelpunkte hat.

Aufgabe 5.5 *

Zeigen Sie, dass die Vervollständigung von einem Längenraum wieder ein Längenraum ist.