4. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(**Abgabe:** bis Freitag 11.12.2015, 12:30 Uhr in der Übung)

Aufgabe 4.1

Sei (X, d) ein CAT(0) Raum. Weiter sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq X$ konvex ist.

Aufgabe 4.2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c : [a, b] \to X$ ein Weg. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $l(c) \geq d(c(a), c(b))$. Weiter gilt: $l(c) = 0$ genau dann wenn c konstant ist.

(ii) Sei $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ eine stetige schwach monotone surjektive Funktion. Dann gilt: $l(c) = l(c \circ \varphi)$.

(iii) Seien $c_1 : [a_1, b_1] \to X, c_2 : [a_2, b_2] \to X$ zwei Wege mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$. Dann gilt: $l(c_1 * c_2) = l(c_1) + l(c_2)$.

(iv) Es gilt: $l(\overline{c}) = l(c)$.

Aufgabe 4.3

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c : [a, b] \to X$ ein rektifizierbarer Weg. Wir definieren

$$\lambda_c : [a, b] \to [0, l(c)]$$

$$t \mapsto l(c_{|[a,t]})$$

Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Weg $\tilde{c} : [0, l(c)] \to X$ mit $\tilde{c} \circ \lambda_c = c$ und $l(\tilde{c}|_{[0,t]}) = t$ existiert.

Aufgabe 4.4

Sei (X, d) ein Längenraum in dem alle abgeschlossene Bälle kompakt sind. Zeigen Sie, ohne das Lemma von Arzela-Ascoli zu benutzen, dass X geodätisch ist.

Hinweise: Zeigen Sie, dass (X, d) Mittelpunkte hat. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Seien $x, y \in X$ beliebig. Da X ein Längenraum ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Weg c_n von x nach y mit $l(c_n) \leq d(x, y) + \frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass ein Punkt $m_n \in \text{Bild}(c_n)$ existiert mit $d(x, m_n) = d(m_n, y)$.

(ii) Zeigen Sie weiter, dass die Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(m_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt. Sei m der Limes dieser Folge.

(iii) Zeigen Sie, dass m ein Mittelpunkt von x und y ist.