3. Hausaufgabenblatt zur Vorlesung CAT(0) kubische Komplexe

(**Abgabe:** bis Freitag 27.11.2015, 12:30 Uhr in der Übung)

Aufgabe 3.1

Sei X ein $CAT(0)$ Raum und $C \subseteq X$ eine konvexe vollständige Teilmenge. Sei weiter $f \in \mathrm{Isom}(X)$ beliebig. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) Die Teilmenge $f(C)$ ist convex und vollständig.

(ii) Es gilt: $\pi_{f(C)} \circ f = f \circ \pi_C$.

Aufgabe 3.2

Sei (X, d) ein geodätischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann $CAT(0)$ ist, wenn für jedes geodätisches Dreieck $\Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ mit Vergleichsdreick $\overline{\Delta}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ gilt:

$$d(x, \beta(s)) \leq d_2(\overline{x}, \overline{\beta}(s)) \text{ für alle } s \in [0, d(y, z)].$$

Aufgabe 3.3

Sei X ein vollständiger $CAT(0)$ Raum und G_1, G_2 Gruppen. Seien weiter

$$\Phi_1 : G_1 \to \mathrm{Isom}(X) \text{ und } \Phi_2 : G_2 \to \mathrm{Isom}(X)$$

isometrische Wirkungen. Weiter gelte für alle $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$:

$$\Phi_1(g_1) \circ \Phi_2(g_2) = \Phi_2(g_2) \circ \Phi_1(g_1).$$

Wir definieren eine Abbildung

$$\Phi_1 \times \Phi_2 : G_1 \times G_2 \to \mathrm{Isom}(X)$$

wie folgt

$$(g_1, g_2) \mapsto \Phi_1(g_1) \circ \Phi_2(g_2).$$

(i) Zeigen Sie, dass $\Phi_1 \times \Phi_2$ eine isometrische Wirkung ist.

(ii) Wenn $\mathrm{Fix}_{\Phi_1}(G_1) \neq \emptyset, \mathrm{Fix}_{\Phi_2}(G_2) \neq \emptyset$, dann gilt: $\mathrm{Fix}_{\Phi_1 \times \Phi_2}(G_1 \times G_2) \neq \emptyset$.

Aufgabe 3.4

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $c : [a, b] \to X$ eine stetige Abbildung mit $d(c(a), c(b)) = b - a$. Zeigen Sie, dass c genau dann eine Geodäte ist, wenn gilt:

$$d(c(s), c(t)) = 2 \cdot d(c(s), c(\frac{s+t}{2})) \text{ für alle } s, t \in [a, b].$$