Fragestellung:

G endlich erzeugte Gruppe $\xrightarrow{\text{isometrisch}}$ X CAT(0) kubischer Komplex

Fixpunkt?

14. Helly's Theorem für CAT(0) kubische Komplexe

Sei X ein CAT(0) kubischer Komplex und S eine endliche Familie von konvexen kubischen Unterkomplexen von X. Wenn sich jeweils 2-Elemente aus S nichttrivial schneiden, dann ist $\cap S$ nichtleer.

Anwendung

25. Satz

Sei $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe. Sei weiter X ein CAT(0) kubischer Komplex und $\Phi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung.

Wenn $\mathrm{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle)$ kubische Unterkomplexe sind und

$\mathrm{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle) \cap \mathrm{Fix}_\Phi(\langle g_j \rangle) \neq \emptyset$ für alle $i,j \in \{1, \dots, k\}$,

dann $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$.

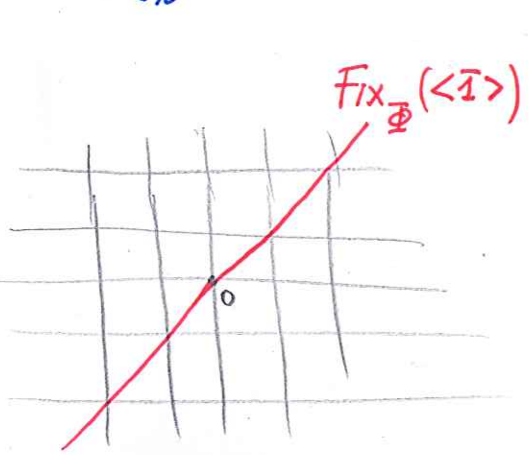
Beweis: Helly's Theorem für CAT(0) kubische Komplexe.

Achtung: i.A. ist $\mathrm{Fix}_\Phi(\langle g_i \rangle)$ kein kubischer Unterkomplex, z.B.:

$G = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $X = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \underset{\{\bar{0}, \bar{1}\}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}}} \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$

$\bar{0} \longmapsto \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$

$\bar{1} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Ausblick:

26. Helly's Theorem für CAT(0)-Räume

Sei X ein <u>d</u>-dimensionaler(*) vollständiger CAT(0)-Raum und $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von nichtleeren konvexen abgeschlossenen Teilmengen von X.
Wenn sich jeweils <u>$(d+1)$</u>-Elemente aus $\mathcal{S}$ nichttrivial schneiden, dann ist $\bigcap \mathcal{S}$ nichtleer.

– ohne Beweis –

(*) Überdeckungsdimension ~ topologische Charakterisierung der Dimension

3.2 Gromov's Link-Bedingung

Leitfrage: Wie kann man in kubischen Komplexen die lokale CAT(0) Eigenschaft testen?

<u>Ab jetzt:</u> X ist ein <u>endlich</u> <u>dimensionaler</u> kubischer Komplex

~~Vorüberlegungen:~~

27. Definition / Erinnerung

Sei Y eine Menge und $\Delta \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Menge von endlichen Teilmengen von Y. Wir nennen $(\Delta, \subseteq)$ einen <u>Simplizialkomplex</u>, wenn gilt:

aus $a \subseteq b \in \Delta$ folgt stets $a \in \Delta$,

d.h. Δ ist abgeschlossen unter Abstieg.

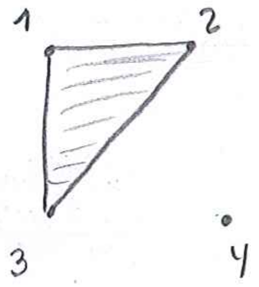
Die <u>Dimension eines Simplex</u> $a \in \Delta$ ist k, falls $\# a = k+1$.

Sei $\Delta^{(k)} = \{a \in \Delta \mid \dim a = k\}$.

28. Beispiel

$Y = \mathbb{N}$

$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$



29. Definition

Ein Simplizialkomplex $\Delta \subseteq P(Y)$ heißt <u>Fahnenkomplex</u>, wenn folgendes gilt:

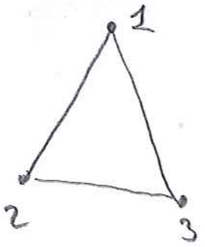
Sei $a \subseteq Y$ endliche Teilmenge. Wenn alle 2-elem. Teilmengen aus a in Δ liegen, dann liegt a in Δ.

30. Beispiel

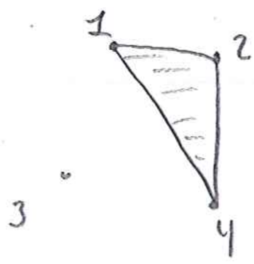
(i) $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ ist <u>kein</u> Fahnenkomplex,

denn $\{1,2,3\} \notin \Delta$ aber

$\left.\begin{array}{l}\{1,2\}\\ \{2,3\}\\ \{1,3\}\end{array}\right\} \in \Delta.$



(ii) $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$ ist ein <u>Fahnenkomplex</u>.



In Worten: Wenn der Rand von einem Simplex in Δ liegt, dann muss auch schon der gesamte Simplex in Δ liegen.

31. Definition

Sei $x \in X$ eine Ecke. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Die kubische Struktur von X induziert auf $\partial B_\varepsilon(x)$ eine simpliziale Struktur und zwar wie folgt:

0-Simplizes: $\{\partial B_\varepsilon(x) \cap k\}$, $k \subseteq X$, k ist isometrisch zu $[0,1]$ und ist eine Seite von einem Würfel

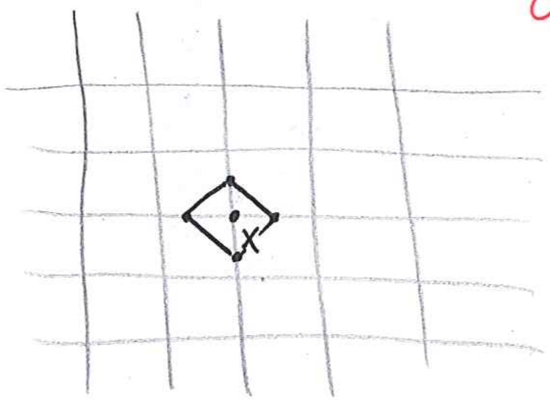
$\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ ist ein k-Simplex $\Leftrightarrow$ $\exists\ W \subseteq X$ Würfel, $\dim W = k+1$ und $\{x_1, \dots, x_{k+2}\} \subseteq W$.

(x_i sind 0-Simplizes und sind paarweise verschieden)

Dieser Simplizialkomplex heißt der Link von x in X. (Eckenlink)

32. Beispiel

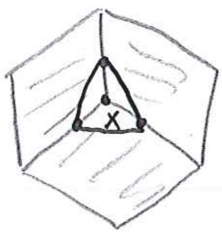
(i) $\mathbb{R}^2$



CAT(0)

$Lk(x) =$  Fahnenkomplex

(ii) X



nicht CAT(0)

$Lk(x) =$  kein Fahnenkomplex

33. Theorem (Gromov's Link Bedingung)

Sei X ein endlich dimensionaler kubischer Komplex.
X ist genau dann lokal CAT(0), wenn alle seine Eckenlinks Fahnenkomplexe sind. – ohne Beweis –

Zusammenfassung:

- CAT(0) Räume $\sim$ 

  - eindeutig geodätisch
  - kontrahierbar

  $\}$ insbesondere einfach zusammenhängend
  - die metrische Vervollständigung eines CAT(0) Raumes ist ein CAT(0) Raum

- <u>Beispiele:</u>
  - $(V, \|\_\|)$ ist CAT(0) $\Leftrightarrow$ $(V, \|\_\|)$ ist ein Prähilbertraum
  - konvexe Teilmengen von CAT(0) Räumen
  - simpliziale Bäume

- <u>Satz von Cartan-Hadamard</u>

  Sei X ein vollständiger zusammenhängender lokaler CAT(0) Raum. Sei $\tilde{X}$ seine universelle Überlagerung. Dann ist $\tilde{X}$ ein CAT(0)-Raum.

  $\rightsquigarrow$ X vollst. zus. lok. CAT(0)-Raum + einfach zusammenh.

  $\Leftrightarrow$ X ist vollständiger CAT(0)

- Wie kann man die lokale CAT(0)-Eigenschaft testen?

  $\rightsquigarrow$ Kubische Komplexe $\rightsquigarrow$ Gromov's Link Bedingung

- <u>Gruppenwirkungen auf CAT(0)-Räumen</u> $G \overset{\text{Fixpunkt?}}{\curvearrowright} X$
  - Bruhat-Tits-Fixpunktsatz
  - Helly's Theorem für Bäume
  - Helly's Theorem für CAT(0) kubische Komplexe