14. Helly's Theorem für CAT(0) kubische Komplexe

Sei X ein CAT(0) kubischer Komplex und S eine endliche Familie von konvexen kubischen Unterkomplexen von X. Wenn sich jeweils 2-Elemente aus S nichttrivial schneiden, dann ist $\bigcap S$ nichtleer.

Um das Theorem zu beweisen, müsen wir Hyperebenen in kubischen Komplexen einführen.

15. Definition

Sei X ein kubischer Komplex. Wir definieren

$$\mathcal{K} := \{ k \subseteq X \mid k \text{ ist isometrisch zu } [0,1] \text{ und es existiert } W \in \mathcal{W}, \text{ s.d. } k \text{ eine Seite von } W \text{ ist} \}.$$

$\mathcal{K}$ ist also die Menge der Kanten von X.

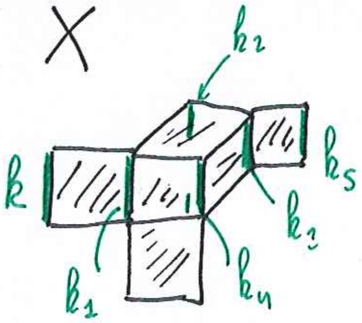
Wir definieren auf dieser Menge wie folgt eine Äquivalenzrelation:

$$k \approx k' :\Longleftrightarrow k \text{ liegt gegenüber von } k' \text{ in einem 2-dim. Würfel von } X.$$

Das ist noch keine Äquivalenzrelation, da $k \not\approx k$.

Sei nun $\sim$ die von $\approx$ erzeugte Äquivalenzrelation.

Wenn $k \sim k'$ ist, dann sagen wir k und k' sind <u>quadratäquivalent</u>.



$[k] = \{k, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$

15. Definition

Sei $W=[0,1]^n \in \mathcal{W}$ ein Würfel. Für $i=1,\dots,n$ definieren wir den Mittelwürfel

$$W_i := [0,1]^{i-1} \times \{\tfrac{1}{2}\} \times [0,1]^{n-i}$$

Sei $k \in \mathcal{K}$ eine beliebige Kante. Ein Mittelwürfel W_i heißt <u>transversal zu k</u>, wenn

$$W_i \cap \mathcal{K} = \{\text{Mittelpunkte von } k' \mid k' \in [k]\}$$

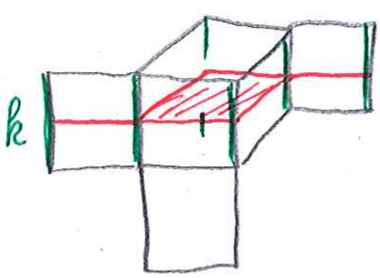
Wir schreiben: $W_i \pitchfork k$

Die Hyperebene zu k ist wie folgt definiert:

$$H(k) := \bigcup_{\substack{W_i \text{ ist Mittelwürfel von } W \in \mathcal{W} \\ W_i \pitchfork k}} W_i$$

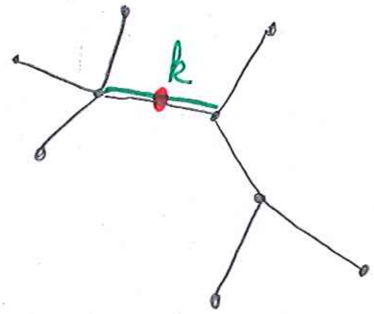
16. Beispiele

(i)



$H(k) =$ 

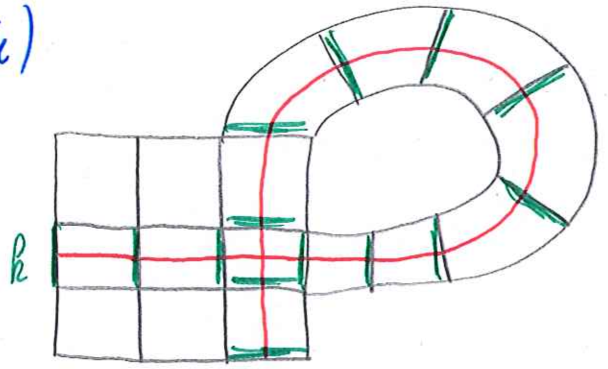
(ii) Sei X ein Baum.

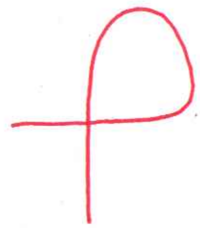


$[k] = \{k\}$

$H(k) = \cdot$

(iii)



$H(k) =$ 

17. Satz (Sageev "Ends of groups pairs and non-positively curved cube complexes" (Theorem 4.10))

Sei X ein CAT(0) kubischer Komplex und H eine kl. Hyperebene. Dann $\# \pi_0(X - H) = 2$.

– ohne Beweis –

Wir schreiben: $X - H = H^+ \dot\cup H^-$ mit $H^+, H^- \in \pi_0(X-H)$.

H^+ bzw. H^- heißen Halbräume in X.

18. Definition

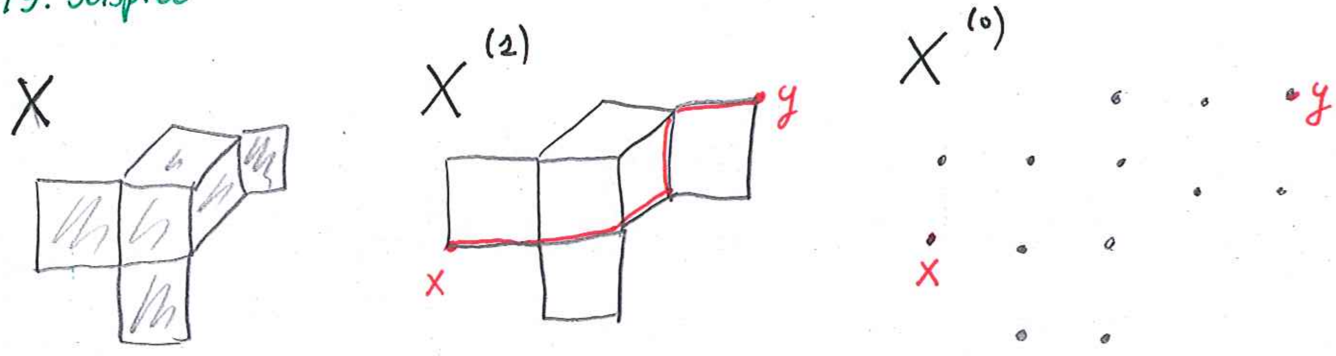
Sei X ein kubischer Komplex und $X^{(0)} \subseteq X$ das 0-Skelett, d.h. $X^{(0)} = \bigcup S/_{\sim} \subseteq X$
S ist eine 0-dim. Seite von $W \in \mathcal{W}$.

Wir definieren auf $X^{(0)}$ wie folgt eine Metrik:

$$D: X^{(0)} \times X^{(0)} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x,y) \longmapsto \inf\{\, l(c) \mid c \text{ ist ein Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1-Skelett}}}{X^{(1)}} \subseteq X \,\}$$

19. Beispiel



$D(x,y) = 5$

20. Lemma

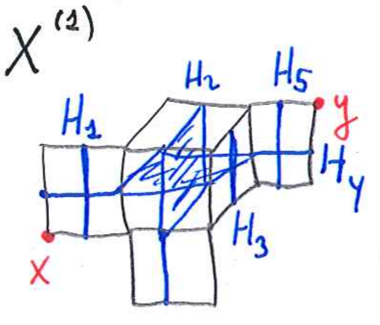
Sei X ein CAT(0) kubischer Komplex. Dann gilt für $x,y \in X^{(0)}$:

$$D(x,y) = \#\{\, H \subseteq X \mid H \text{ ist Hyperebene, die } x \text{ und } y \text{ trennt (d.h. } x \in H^+ \text{ und } y \in H^- \text{ oder } y \in H^+ \text{ und } x \in H^-) \,\}.$$

(~~zwischen~~)

– ohne Beweis –

21. Beispiel



22. Definition

Sei $\Gamma = (V,E)$ ein Graph. (Wir betrachten Graphen immer als 1-dim. kubische Komplexe mit der Metrik d).

Das Intervall $I(u,v)$ für $u,v \in V$ (= Ecken) ist definiert durch:

$$I(u,v) := \{ x \in V \mid d(u,x) + d(x,v) = d(u,v) \}$$

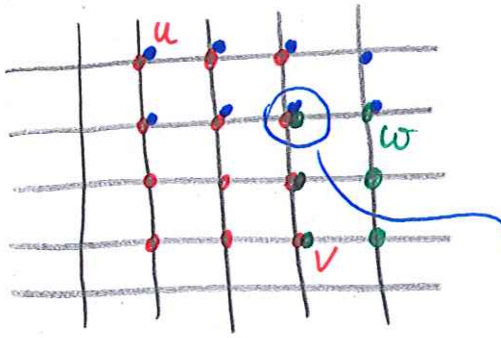
Ein Graph Γ heißt <u>median</u>, falls für bel. $u,v,w \in V$ paarweise verschieden gilt:

$$\#\left(I(u,v) \cap I(v,w) \cap I(u,w) \right) = 1$$

23. Beispiel

$I(u,v)$

$I(u,w)$



$I(v,w)$

$\in I(u,v) \cap I(v,w) \cap I(u,w)$

24. Satz

Sei X ein CAT(0) kubischer Komplex und $X^{(1)}$ das 1-Skelett.

Dann ist $(X^{(1)}, D)$ median.

<u>Beweis:</u>

<u>Hilfslemma:</u> Seien $x,y,z \in X^{(0)}$ beliebig. Dann gilt:

$z \in I(x,y) \iff$ es existiert keine Hyperebene H mit $z \in H^-$ und $\{x,y\} \subseteq H^+$.

Beweis des Hilfslemmas:

Wir definieren $W(x,y) = \{ H \subseteq X \mid H$ ist eine Hyperebene die x und y trennt, (d.h. $x \in H^-$ und $y \in H^+$) $\}$

⊛ Nach Lemma 20 gilt: $D(x,y) = \# W(x,y)$

Wir erhalten:

$$z \in I(x,y) \overset{\text{Def.}}{\iff} D(x,y) = D(x,z) + D(z,y)$$

$$\overset{⊛}{\iff} \# W(x,y) = \# W(x,z) + \# W(z,y)$$

$$\iff W(x,y) = W(x,z) \,\dot\cup\, W(z,y)$$

$\iff$ es existiert keine Hyperebene H mit $z \in H^-$ und $\{x,y\} \subseteq H^+$. □

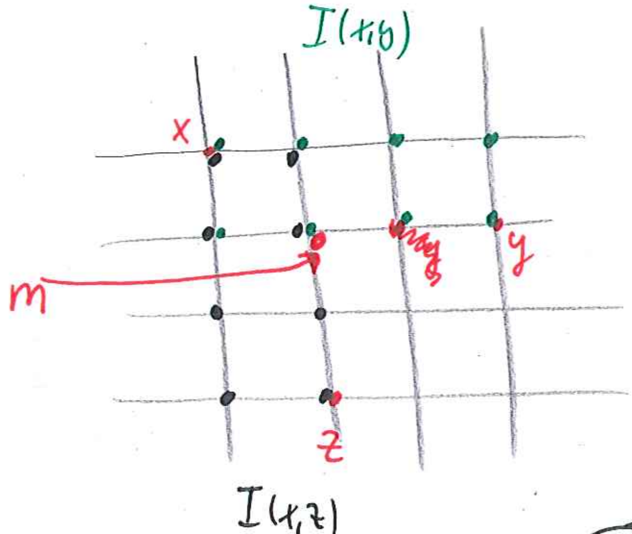
Zurück zum Beweis: Seien also $x, y, z \in X^{(0)}$ paarweise verschieden.

(i) Zuerst zeigen wir: $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) \neq \emptyset$.

Wähle

$m \in I(x,y) \cap I(x,z)$ mit

$D(x,m)$ maximal.



Z.z.: $m \in I(y,z)$

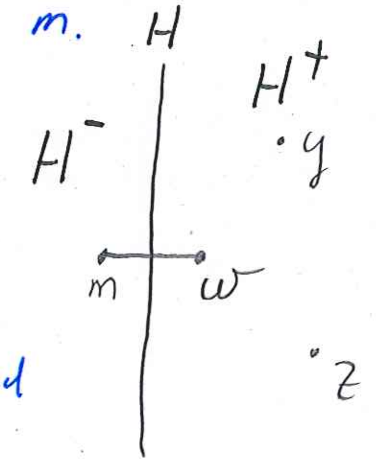
A: $m \notin I(y,z)$. Nach dem Hilfslemma existiert eine Hyperebene H die m und $\{y,z\}$ trennt.

Wähle H mit minimalen Abstand zu m.

Wähle $w \in H^+$ mit $D(m,w)$ minimal.

Es gilt $D(m,w)=1$

Es gilt (gleich im Detail): $w \in I(x,y)$ und
$w \in I(x,z)$

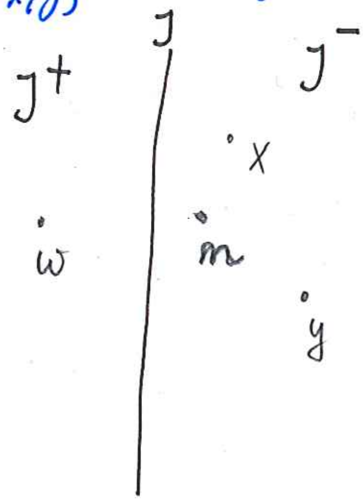


Weiter gilt:

$$D(x,w) = D(x,m) + D(m,w) \geq D(x,m) \text{ ↯ }$$ zur Maximalität.

<u>Im Detail:</u>

A: $w \notin I(x,y)$, dann existiert nach dem Hilfslemma eine Hyperebene J die w und $\{x,y\}$ trennt.



Wo liegt m?

Es gilt $m \notin J^+$, denn
$m \in I(x,y)$, also $m \in J^-$.

Folglich trennt J auch m und w.

Es gilt $D(m,w) = 1$, folglich $J = H$.

Aber H trennt m und y ↯.

Genauso zeigt man, dass gilt: $w \in I(x,z)$.

(ii) Eindeutigkeit

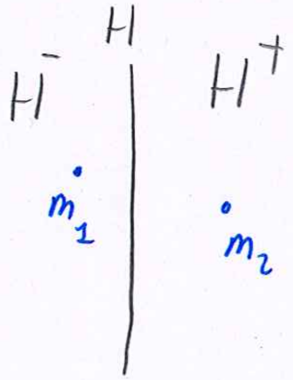
Wir definieren

$\mathcal{HR} := \{$ Halbräume, die mindestens zwei Elemente aus $\{x, y, z\}$ enthalten $\}$

Es gilt: $I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) \subseteq \bigcap \mathcal{HR}$ $(*)$

A: es existieren $m_1, m_2 \in I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)$, $m_1 \neq m_2$.

Dann ex. eine Hyperebene H, die m_1 und m_2 trennt.



OBdA: $x, y \in H^-$.

Dann gilt: $H^- \in \mathcal{HR}$ und

$H^+ \notin \mathcal{HR}$.

Folglich gilt: $\cancel{H^+}$ $m_2 \notin \bigcap \mathcal{HR}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} m_2 \notin I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z)$ $\lightning$. $\square$

Beweis des Helly's Theorems für kubische Komplexe:

Sei $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$.

Wir zeigen, dass sich k-elementige Teilmengen aus $\mathcal{S}$ nichttrivial schneiden.

<u>IA:</u> $k=2$ ✓

<u>IS:</u> $k-1 \rightsquigarrow k$

Sei also $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\} \subseteq \mathcal{S}$ eine k-elementige Teilmenge.

Wir definieren

$$Y := X_{i_3} \cap \ldots \cap X_{i_k}$$

Nach IA: $X_{i_1} \cap Y \neq \emptyset$, $X_{i_2} \cap Y \neq \emptyset$ und $X_{i_1} \cap X_{i_2} \neq \emptyset$.

Da $X_{i_1} \cap Y$, $X_{i_2} \cap Y$, $X_{i_1} \cap X_{i_2}$ konvexe kubische Unterkomplexe sind, sind diese insbesondere CAT(0) und die 1-Gerüste von diesen sind mediane Graphen.

Wähle Ecken $P \in X_{i_1} \cap Y$
$Q \in X_{i_2} \cap Y$
$R \in X_{i_1} \cap X_{i_2}$.

Also: $P \in Y$ und $Q \in Y \Rightarrow I(P,Q) \subseteq Y$
$R \in X_{i_1}$ und $P \in X_{i_1} \Rightarrow I(R,P) \subseteq X_{i_1}$
$Q \in X_{i_2}$ und $R \in X_{i_2} \Rightarrow I(Q,R) \subseteq X_{i_2}$

Weiter ist $I(P,Q) \cap I(R,P) \cap I(Q,R) \overset{\text{median}}{=} \{m(P,Q,R)\}$

Folglich: $m(P,Q,R) \in X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap Y$. $\square$.