Vorlesung

CAT(0) kubische Komplexe

WS 15/16

4 Stündig

Münster

(Mi 10-12 M3)
Fr 12-14

Konzept:

$$\text{Gruppen} \xrightarrow[\text{isometrisch}]{\text{Fixpunkt?}} \text{metrische Räume mit "viel Geometrie"}$$

Gruppen
- endliche Gruppen
- $GL_n(\mathbb{Z})$, $SL_n(\mathbb{Z})$
- $Aut(F_n)$, $SAut(F_n)$
- Coxetergruppen (Spiegelungsgruppen)

metrische Räume mit "viel Geometrie"
- CAT(0)-Räume
  - $(\mathbb{R}^n, d_2)$
  - Hilberträume
  - simpliziale Bäume
  - CAT(0) kubische Komplexe

Geplante Themen:
- CAT(0) Räume
- simpliziale Bäume, kubische Komplexe
- Gruppenwirkungen auf CAT(0) kubische Komplexe

Methoden für die Fixpunktexistenz:
- Bruhat-Tits Fixpunktsatz für CAT(0) Räume
  für CAT(0) kubische Komplexe
- Helly's Theorem für CAT(0)-Räume

  Helly (1922):
  Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossene konvexe Teilmengen mit der Eigenschaft, dass je $(d+1)$-Mengen mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. Dann $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$
- Kazhdan's Eigenschaft (T)
- $SL_n(\mathbb{Z})$, $GL_n(\mathbb{Z})$, $Aut(F_n)$, $SAut(F_n)$, Coxetergruppen: (T)???

Literatur:
- Bridson-Haefliger, Spaces of Non-Positive Curvature
- Serre, Trees
- Bekka-Harpe-Valette, Kazhdan's Property (T)

§ 1 CAT(0) Räume

1. Definition

Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heißt <u>Metrik</u>, wenn gilt:

(i) $\forall x,y \in X: \ d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\forall x,y \in X: \ d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $\forall x,y,z \in X: \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Das Paar (X,d) heißt dann <u>metrischer Raum</u>.

2. Beispiele ("schönes" + "langweiliges")

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum.

(ii) Sei X eine Menge. Wir definieren

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1; & x \neq y \\ 0; & x = y \end{cases}$$

Dann ist d eine <u>Metrik</u> und (X,d) heißt ein <u>diskreter metrischer Raum</u>.

3. Definition

(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine <u>Geodäte von x nach y</u> $\in X$ ist eine Abbildung

$$\gamma: \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{[a,b]}} \to X \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \quad \text{und} \\ d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'| \\ \qquad \forall\, t,t' \in [a,b] \end{array}$$

($[a,b] \subseteq \mathbb{R}$)

Wir schreiben: $\gamma: x \rightsquigarrow y$

(ii) Der Raum (X,d) ist ein <u>geodätischer Raum</u>, wenn $\forall\, x,y \in X$ eine Geodäte von x nach y existiert.

(iii) Ein geodätischer Raum heißt <u>eindeutig geodätisch</u>, wenn genau eine solche Geodäte existiert.

4. Beispiele

(i) Sei $(V, \|\_\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Dann ist $(V, d_{\|\_\|})$ ein geodätischer Raum.

<u>Im</u> Detail: seien $u,v \in V$, $u \neq v$ bel. und $L := \|u-v\|$

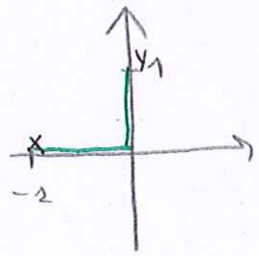
Dann ist:

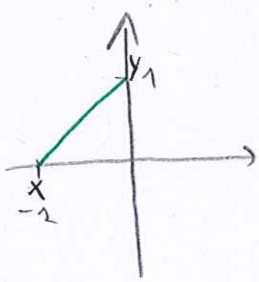
$$\begin{aligned} \gamma : [0,L] &\to V \\ t &\mapsto \left(1-\frac{t}{L}\right)\cdot u + \frac{t}{L}\cdot v \end{aligned}$$

eine Geodäte von u nach v.

(ii) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, d_2)$ ist nicht geodätisch

(iii) $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist geodätisch, aber nicht eindeutig geodätisch.



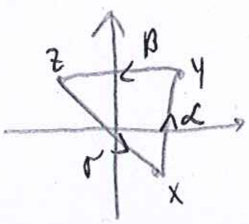


5. Definition

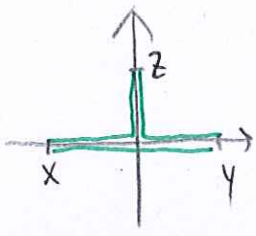
Ein geodätisches Dreieck $\Delta = \Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ in einem geod. Raum (X,d) ist gegeben durch ein Tripel $x,y,z \in X$ und Geodäten: $\alpha : x \rightsquigarrow y$, $\beta : y \rightsquigarrow z$, $\gamma : z \rightsquigarrow x$ den Seiten von Δ.

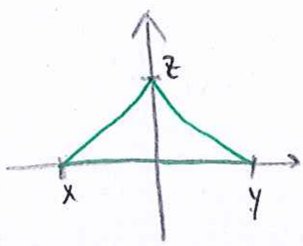
6. Beispiele

$\mathbb{E}^2$



$(\mathbb{R}^2, d_1)$





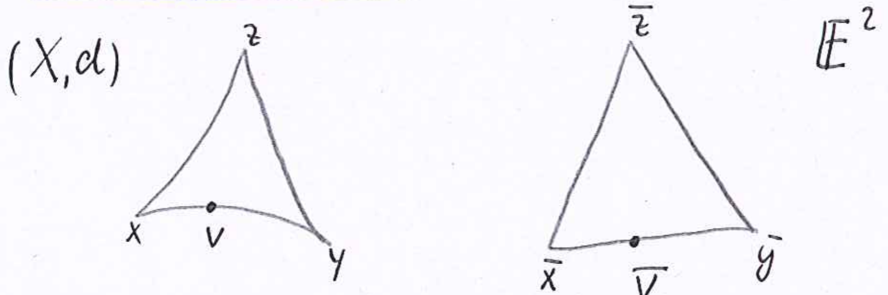
! Geodätische Dreiecke sind i.A. durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.

Die Dreiecks-Ungleichung garantiert, dass es in $\mathbb{E}^2$ Punkte $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ gibt mit:

$$d(x,y) = d_2(\bar{x},\bar{y})$$
$$d(y,z) = d_2(\bar{y},\bar{z})$$
$$d(x,z) = d_2(\bar{x},\bar{z})$$

und Geodätische $\bar{\alpha}(t) = \bar{x} + t \cdot \dfrac{\bar{y}-\bar{x}}{d_2(\bar{y},\bar{x})}$ u.s.w.

Ist $v = \alpha(s)$, so heißt $\bar{v} = \bar{\alpha}(s)$ Vergleichspunkt und $\bar{\Delta} := \bar{\Delta}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})$ heißt <u>Vergleichsdreieck zu $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$</u>.



7. Definition

(i) Ein Dreieck Δ in (X,d) hat die <u>CAT(0)-Eigenschaft</u>, wenn gilt:

$$d(n,m) \leq d_2(\bar{n},\bar{m})$$

$\forall\, n,m$ und ihre Vergleichspunkte $\bar{n},\bar{m}$ auf Seiten von Δ bzw. $\bar{\Delta}$

(ii) Ein metrischer Raum (X,d) ist ein <u>CAT(0)-Raum</u>, wenn (X,d) geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0) Eigenschaft erfüllen.

(iii) Ein Raum (X,d) ist <u>lokal CAT(0)</u>, wenn gilt:

$\forall x \in X \; \exists r_x > 0$ s.d.

$$B_{r_x}(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r_x \}$$

mit der induzierten Metrik ein CAT(0) Raum ist.

8. Bemerkungen

(i) lokal CAT(0) Räume heißen auch nicht-positiv gekrümmte oder Alexandrov-Räume

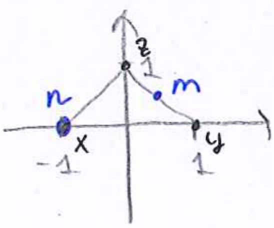
(ii) CAT(0) steht für

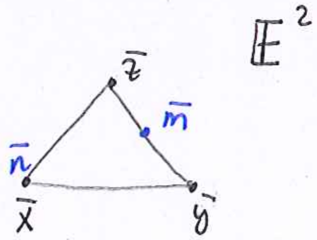
C → Cartan
A → Alexandrov
T → Toponogov
(0) → Krümmung ≤ 0.

9. Beispiele

(i) Der eukl. Raum $\mathbb{E}^n$ ist CAT(0).

(ii) $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0), denn





$d_1(x,y) = 2$
$d_1(x,z) = 2$
$d_1(z,y) = 2$

$$d_1(n,m) = 2 > d_2(\bar{n},\bar{m}) = \sqrt{3}$$

(iii) Hilberträume sind CAT(0).

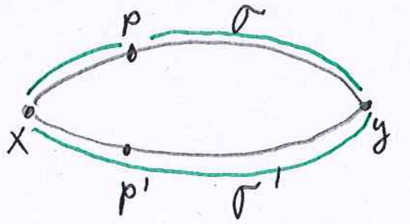
(iv) Komplemente von Polygonen in $\mathbb{R}^2$ sind lokal CAT(0), aber nicht CAT(0).

10. Beobachtung

Sei (X,d) ein CAT(0)-Raum. Dann ist X eindeutig geodätisch.

<u>Beweis:</u>

Seien $\sigma: x \rightsquigarrow y$ und $\sigma': x \rightsquigarrow y$ zwei Geodäten von x nach y.



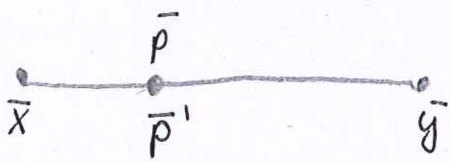
Seien p und p' Punkte auf σ bzw. σ' mit

$$d(x,p) = d(x,p')$$

Das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ zum Dreieck

$$\Delta = \Delta\left(x, p, y, \sigma|_{[0,d(x,p)]}, \sigma|_{[d(x,p),d(x,y)]}, \sigma'\right)$$

ist degeneriert, d.h.



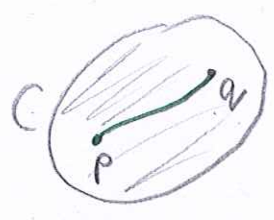
Es gilt: $d(p,p') \overset{CAT(0)}{\leq} d(\bar{p},\bar{p}') = 0$

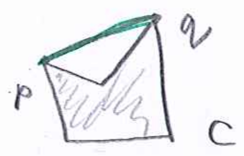
$$\Rightarrow d(p,p') = 0$$

$$\Rightarrow p = p'. \qquad \square$$

11. Definition

Sei X ein CAT(0) Raum. Eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq X$ heißt <u>convex</u>, wenn zu allen $p, q \in C$ die Geodätische $\sigma: p \rightsquigarrow q$ in C liegt.



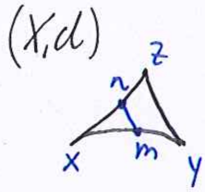


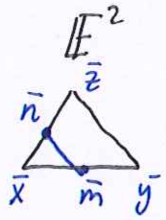
nicht convex

- Offensichtlich ist C wieder ein CAT(0)-Raum
- Durchschnitte von konvexen Mengen sind konvex #

Wiederholung:

- Def.: CAT(0)-Raum





$\Rightarrow$ eindeutig geodätisch

- Beispiele:
  - reelle normierte Vektorräume $(V, \|\_\|)$ sind geodätisch
  - $\mathbb{E}^n$ ist CAT(0)
  - reelle Hilberträume sind CAT(0)
  - convexe Teilmengen von CAT(0) Räumen sind CAT(0)
  - $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist nicht CAT(0)

12. Theorem [BH 1A.6]
Sei M eine einfach zusammenhängende Riem. Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Dann ist M ein CAT(0)-Raum.

- ohne Beweis -

13. Satz Sei $(V, \|\_\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Dann ist $(V, \|\_\|)$ genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn $(V, \|\_\|)$ ein Prähilbertraum ist, d.h. es ex. eine symmetrisch positiv definite Bilinearform

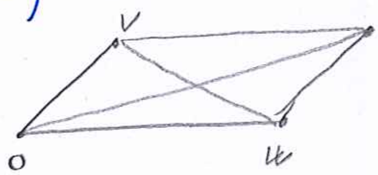
$$\langle \_, \_ \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \quad \text{mit } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Für den Beweis brauchen wir eine metrische Charakterisierung von Prähilberträumen.

14. Proposition (Parallelogrammgesetz (PG)) (J. von Neumann '35)
Ein reeller normierter Vektorraum $(V, \|\_\|)$ ist ein Prähilbertraum genau dann, wenn

$$\forall \; v, w \in V: \; \|v-w\|^2 + \|v+w\|^2 = 2 \cdot \left(\|v\|^2 + \|w\|^2 \right)$$

In Worten: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der zwei Diagonalen.



Beweis:

„$\Rightarrow$" Seien $v, w \in (V, \|\_\|)$ bel.

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle + \langle u+v, u+v\rangle$$
$$= \langle u,u\rangle + \underline{\langle u,-v\rangle} + \underline{\underline{\langle -v,u\rangle}} + \langle -v,-v\rangle$$
$$+ \langle u,u\rangle + \underline{\langle u,v\rangle} + \underline{\underline{\langle v,u\rangle}} + \langle v,v\rangle$$
$$= 2\cdot\langle u,u\rangle + 2\cdot\langle v,v\rangle$$
$$= 2\cdot(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

„$\Leftarrow$" Wir definieren $b: V\times V \to \mathbb{R}$
$$(u,v) \mapsto \frac{1}{4}\cdot(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

z.z.: b ist ein Skalarprodukt

- b ist symmetrisch, denn
$$b(u,v) = \frac{1}{4}\cdot(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2)$$
$$= b(v,u)$$

- b ist positiv definit, denn:
$$b(v,v) = \frac{1}{4}\cdot(\|2v\|^2 - 0) = \|v\|^2 \geq 0$$
und
$$b(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Sei nun $w \in V$ fest. Wir müssen noch zeigen, dass $b(-,w)$ eine lineare Abbildung ist.

Seien $u, v \in V$ bel.

Es gilt:

- $b(u+v,w) + b(u-v,w)$
$$\overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{4}\left(\|u+v+w\|^2 - \|u+v-w\|^2 + \|u-v+w\|^2 - \|u-v-w\|^2\right)$$
$$\overset{\text{PG}}{=} \frac{1}{4}\left(2\cdot\|u+w\|^2 + \underline{2\cdot\|v\|^2} - 2\cdot\|u-w\|^2 - \underline{2\cdot\|v\|^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2\right)$$
$$\overset{\text{Def}}{=} 2\cdot b(u,w) \qquad (*)$$

Genauso

- $b(u+v,w) - b(u-v,w) = 2 \cdot b(v,w)$ ⊛⊛

$\rightsquigarrow$ ⊛ + ⊛⊛ ergibt:

$$2 \cdot b(u+v,w) = 2 \cdot b(u,w) + 2 \cdot b(v,w)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b(u+v,w) = b(u,w) + b(v,w)}}.$$

Bleibt z.z: $\forall\ r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$b(rv,w) = r\, b(v,w)$$

<u>1. Fall:</u> $r = -1$

Mit $u=0$ folgt aus ⊛:

$$b(v,w) + b(-v,w) = 2 \cdot b(0,w) \overset{\text{Def}}{=} 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\|w\|^2 - \|w\|^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b(-v,w) = -b(v,w)}}$$

<u>2. Fall:</u> $r = n \in \mathbb{N}$

<u>IA:</u> $n=2$

Mit $v=u$ folgt aus ⊛:

$$b(2 \cdot v, w) + \underbrace{b(0,w)}_{=0} = 2 \cdot b(v,w)$$

<u>IS:</u>

$$\underline{\underline{b(n \cdot v,w)}} = b((n-1)v + v, w) = b((n-1)v, w) + b(v,w) \overset{\text{IV}}{=} (n-1)\, b(v,w) + b(v,w) = \underline{\underline{n \cdot b(v,w)}}.$$

<u>3. Fall:</u> $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Es gilt: $b(n \cdot v, w) = n\, b(v,w)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\, b(n \cdot v, w) = b(v,w)$$

Damit erhalten wir:

$$\underline{\underline{b\left(\tfrac{1}{n} v, w\right)}} = \frac{1}{n} b\left(n \cdot \tfrac{1}{n} v, w\right) = \underline{\underline{\frac{1}{n}\, b(v,w)}}$$

Aus 1, 2 und 3 folgt:

$$b(qv, w) = q\, b(v,w) \quad \text{für } q \in \mathbb{Q}.$$

- Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und $b(-,w)$ stetig ist, folgt

$$\underline{\underline{b(rv, w) = r\, b(v,w)}} \quad \forall\, r \in \mathbb{R} \qquad \square$$

<u>Beweis von Satz 13:</u>

„$\Rightarrow$"

Seien $u, v \in V$ bel. Wir zeigen, dass für u, v das PG gilt.
Wir betrachten das Dreieck $\Delta(0, v, u)$ und das Vergleichsdreieck $\bar\Delta(0, \bar v, \bar u)$

$(V, \|\_\|)$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{E}^2$

Es gilt:

$$d\left(\frac{u+v}{2}, 0\right) \overset{CAT(0)}{\leq} d_2\left(\frac{\bar u + \bar v}{2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad d(u+v, 0) \leq d_2(\bar u + \bar v, 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\|u+v\|^2}} \leq \|\bar u + \bar v\|_2^2$$

$$\overset{PG \text{ in } \mathbb{E}^2}{=} 2 \cdot \|\bar u\|_2^2 + 2 \cdot \|\bar v\|_2^2 - \|\bar u - \bar v\|_2^2$$

$$\underline{\underline{\overset{CAT(0)}{=} 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u - v\|^2}} \qquad (*)$$

Nun betrachten wir das Dreieck $\Delta(0, -v, u)$ und das Vergleichsdreieck $\bar\Delta(0, -\bar v, \bar u)$.
Wir erhalten genauso wie oben die Ungleichung:

$$\underline{\underline{\|u - v\|^2 \leq 2 \cdot \|u\|^2 + 2 \cdot \|v\|^2 - \|u+v\|^2}} \qquad (**)$$

Insgesamt:

$$\|u+v\|^2 \overset{\circledast}{\leq} 2\cdot\|u\|^2+2\cdot\|v\|^2-\|u-v\|^2 \overset{\circledast\circledast}{\leq} \|u+v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|u+v\|^2 = 2\cdot\|u\|^2+2\cdot\|v\|^2-\|u-v\|^2$$

„$\Leftarrow$" Sei $\Delta \subseteq (V, \|\_\|)$ ein geod. Dreieck.

Dann
$$\langle \Delta \rangle \underset{\text{isometrisch}}{\cong} \mathbb{E}^2 \text{ oder } \mathbb{E}^1 \text{ oder } \{0\}.$$
$\square$

15. Erinnerung

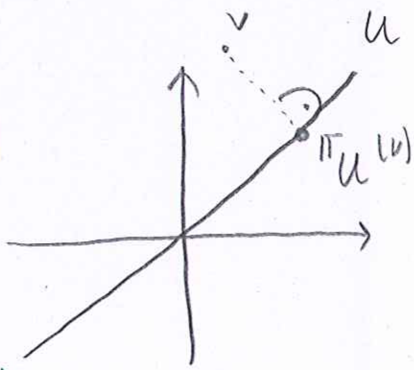
Gegeben sei ein reeller Hilbertraum $\mathbb{E}^d$ und $U \subseteq \mathbb{E}^d$ ein Unterraum. Sei weiter $v_0, \dots, v_n \in U$ eine Orthonormalbasis von U. Dann ist

$$\pi_U : V \to U$$
$$v \mapsto \sum_{i=0}^{n} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$$

eine lineare Abbildung und es gilt:

$$d(v, \pi_U(v)) = \inf_{u \in U} d(v,u) =: d(v, U)$$

und $\quad v - \pi_U(v) \perp U$.



16. Satz (Projektion auf konvexe Teilmengen)

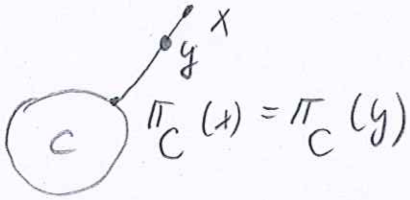
Sei X ein CAT(0) Raum und $C \subseteq X$ konvex und vollständig mit der induzierten Metrik. Dann gilt:

(i) $\forall\, x \in X \ \exists!\ \pi_C(x) \in C$ mit

$$d(x, \pi_C(x)) = \inf_{p \in C} d(x,p) =: d(x, C)$$

Die Abbildung $\pi_C : X \to C$ heißt <u>die (orthogonale) Projektion auf C</u>.

(ii) Ist $y \in \text{Bild}\,(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$, so ist $\pi_C(y) = \pi_C(x)$



(iii) Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x,y), \text{ d.h. } \pi_C \text{ ist 1-Lipschitz.}$$

Beweis:

(i) Sei $y_n \in C$ eine Folge mit $d(x, y_n) \to d(x, C) =: D$.
Ziel ist es zu zeigen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Da C vollständig ist, ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in C und wir können $\pi_C(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$ def.

Eindeutigkeit von $\pi_C(x)$:

Angenommen $\exists\, \pi_C(x)' \in C$, $\pi_C(x') \neq \pi_C(x)$ und

$$d(x, \pi_C(x)') = d(x, C).$$

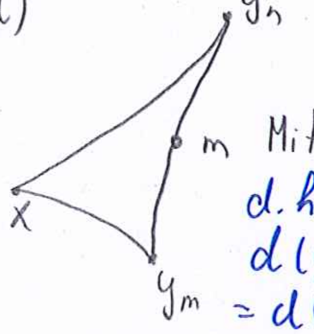
Betrachte die Folge $q_n := \begin{cases} \pi_C(x) \,; & n \text{ gerade} \\ \pi_C(x)' \,; & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Dann ist $d(x, q_n) \to d(x, C)$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge ↯.

—

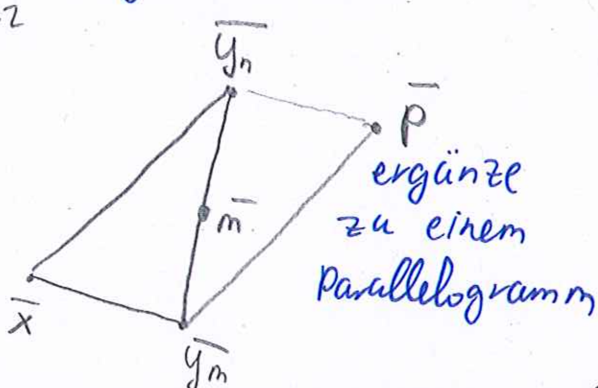
Betrachte folgendes Dreieck und Vergleichsdreieck:

(X,d)



Mittelpunkt
d.h.
$d(y_n, m)$
$= d(m, y_n)$
$= \frac{1}{2} d(y_n, y_m)$

$\mathbb{E}^2$



- Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{E}^2$ besagt:

$$d_2(\bar{x},\bar{p})^2 + d_2(\bar{y_n},\bar{y_m})^2 = 2\cdot\left(d_2(\bar{x},\bar{y_n})^2 + d_2(\bar{x},\bar{y_m})^2\right)$$

- Sei $\varepsilon > 0$.

Sei weiter $\delta > 0$ die positive Lösung von

$$\delta^2 + 2\cdot D\delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$$

Dann ist $\varepsilon = 2\cdot\sqrt{\delta^2 + 2D\delta}$.

- Wähle n,m groß genug mit:

$$d(x,y_n) < D+\delta \qquad \forall\, n,m \geq N. \qquad (*)$$
$$d(x,y_m) < D+\delta$$

- Aus der CAT(0) Eigenschaft folgt:

$$D \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \in C,\text{ da} \\ C \text{ konvex}}}{d(x,m)} \leq d_2(\bar{x},\bar{m}) \qquad (*)(*)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
d(y_n,y_m)^2 &\overset{CAT(0)}{=} d_2(\bar{y_n},\bar{y_m})^2 \\
&\overset{PG}{=} 2\cdot\left(d_2(\bar{x},\bar{y_n})^2 + d_2(\bar{x},\bar{y_m})^2\right) - d_2(\bar{x},\bar{p})^2 \\
&= 2\cdot\left(d_2(\bar{x},\bar{y_n})^2 + d_2(\bar{x},\bar{y_m})^2\right) - 4\cdot d_2(\bar{x},\bar{m})^2
\end{aligned}$$

$d_2(\bar{x},\bar{p}) = 2\cdot d_2(\bar{x},\bar{m})$

$$\begin{aligned}
&\overset{(*)(*)+CAT(0)}{\leq} 2\cdot\left(d(x,y_n)^2 + d(x,y_m)^2\right) - 4\cdot D^2 \\
&\overset{(*)}{<} 2\cdot\left(2\cdot(D+\delta)^2\right) - 4\cdot D^2 \qquad \forall\, n,m \geq N \\
&= 4\cdot\left(2D\delta + \delta^2\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(y_n,y_m) \leq 2\cdot\sqrt{2D\delta+\delta^2} = \varepsilon \qquad \forall\, n,m \geq N$$

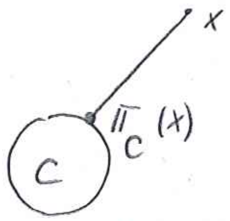
$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge und hat einen Grenzwert in C.

Setze $\pi_C(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$ $\#$

Wiederholung:

- $(V, \|\_\|)$ ist $CAT(0) \Leftrightarrow (V, \|\_\|)$ ein Prähilbertraum ist
  $\|\_\| = \sqrt{\langle -,- \rangle}$
- Sei X ein $CAT(0)$-Raum und $\emptyset \neq C \subseteq X$ konvex und vollst.

$$\pi_C : X \to C$$
$$x \mapsto \pi_C(x) \text{ mit } d(x, \pi_C(x)) = \inf_{c\in C} \{d(x,c)\} =: d(x, C).$$



16. Satz

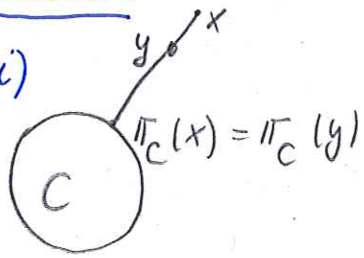
(ii) Ist $y \in \text{Bild}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$, so ist $\pi_C(y) = \pi_C(x)$

(iii) Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x,y), \text{ d.h. } \pi_C \text{ ist 1-Lipschitz.}$$

Beweis:

(ii)



Es gilt:

$$\text{Bild}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x)) = \{y \in X \mid d(x,y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x))\}.$$

Angenommen $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$

Dann ist insbesondere: $d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x))$ $(*)$

und somit:

$$\begin{aligned} d(x, \pi_C(y)) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,y) + d(y, \pi_C(y)) \\ &\overset{(*)}{<} d(x,y) + d(y, \pi_C(x)) \\ &= d(x, \pi_C(x)) \quad \text{↯ zur Minimalität von } \pi_C(x). \end{aligned}$$

$y \in \text{Bild}(\gamma : x \rightsquigarrow \pi_C(x))$

(iii) ÜA

$\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass CAT(0)-Räume kontrahierbar sind.

Wiederholung:

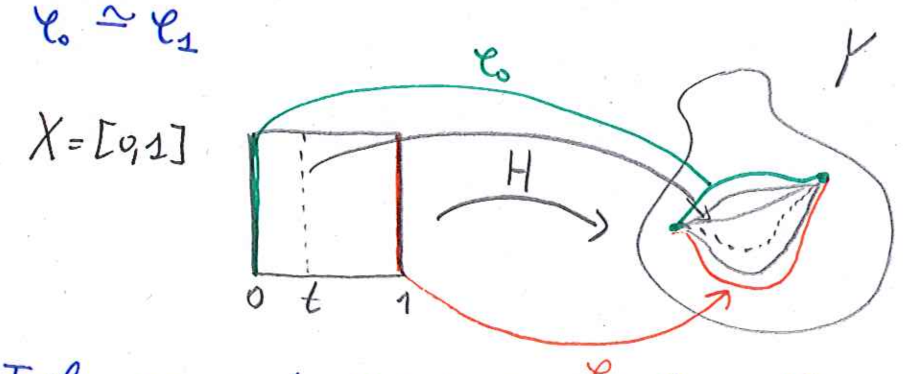
17. Definition: Seien $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen den topologischen Räumen X und Y.

(i) Die Abbildungen φ_0, φ_1 heißen <u>homotop</u>, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt mit

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= \varphi_0(x) \\ H(x,1) &= \varphi_1(x) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } x \in X.$$

H heißt <u>Homotopie</u> zwischen φ_0 und φ_1.

Schreibweise: $\varphi_0 \simeq \varphi_1$

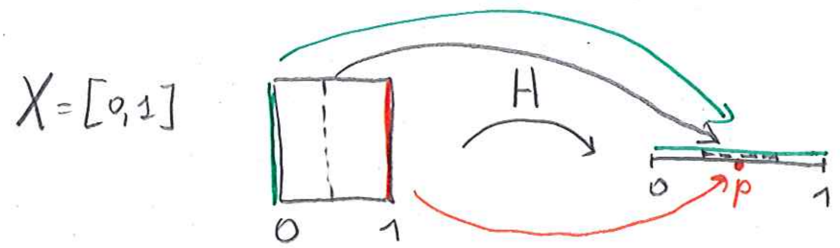


(ii) Ist $A \subseteq X$ Teilmenge und $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ für alle $a \in A$, so heißen φ_0 und φ_1 <u>homotop relativ zu A</u>, wenn es eine Homotopie H zwischen φ_0 und φ_1 gibt mit

$$H(a,t) = \varphi_0(a) \text{ für alle } t \in [0,1] \text{ und } a \in A.$$

Schreibweise: $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \text{ rel } A$.

(iii) Ein top. Raum $X \neq \emptyset$ heißt <u>kontrahierbar</u>, wenn die Abbildungen $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$ und $\varphi_p : X \to X,\ x \mapsto p$ (konstante Abb.) homotop sind.



18. Bemerkung Sei X ein kontrahierbarer top. Raum. Dann ist $\pi_1(X, \{x_0\}) \cong \{0\}$.

19. Satz Sei X ein CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq C \subseteq X$ konvex und vollständig. Dann gilt:

$$id_X \simeq \pi_C \quad \text{rel } C$$

Insbesondere erhalten wir für $C = \{p\}$, $p \in X$:

$$id_X \simeq c_p : \begin{array}{l} X \to X \\ x \mapsto p \end{array} \quad \text{rel } \{p\}.$$

und folglich ist der Raum X kontrahierbar.

Beweis:

Wir brauchen folgendes Resultat:

$\boxed{\text{ÜA}}$: Seien $\alpha : x \rightsquigarrow y$ und $\beta : x' \rightsquigarrow y'$ zwei Geodäten.
Dann gilt:

$$d(\alpha(t \cdot d(x,y)), \beta(t \cdot d(x', y'))$$
$$\leq (1-t)\, d(x, x') + t \cdot d(y, y') \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

Wir definieren:

$$H : X \times [0,1] \to X \text{ wie folgt}:$$
$$(x,t) \longmapsto \gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x)))$$

$$\text{für } \begin{array}{l} \gamma_x : [0, d(x, \pi_C(x))] \to X \\ \gamma_x : x \rightsquigarrow \pi_C(x) \end{array}$$

Es gilt:
$$\left.\begin{array}{l} H(x,0) = \gamma_x(0) = x \\ H(x,1) = \gamma_x(d(x, \pi_C(x))) = \pi_C(x) \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in X.$$

Sei weiter $c \in C$. Dann gilt:

$$H(c,t) = \gamma_c(t \cdot d(c, \pi_C(c))) \overset{c = \pi_C(c)}{=} \gamma_c(0) = c.$$

Bleibt z.z.: H ist stetig.

Wir wissen, dass Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann stetig sind, wenn sie folgenstetig sind.

Sei $(x,t) \in X \times [0,1]$ bel.

Sei weiter $(x_n, t_m) \in X \times [0,1]$ eine Folge mit

$$\lim_{n,m} (x_n, t_m) = (x,t)$$

<u>Z.z:</u> $\lim_{n,m} H(x_n, t_m) = H(x,t)$

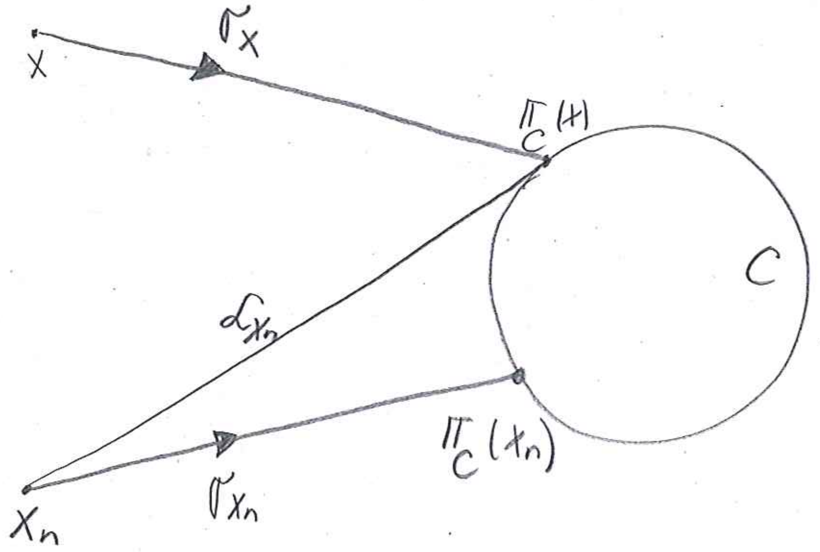
$\overset{\text{Def.}}{\iff} \lim_{n,m} \Gamma_{x_n}(t_m \cdot d(x_n, \pi_C(x_n))) = \Gamma_x(t \cdot d(x, \pi_C(x)))$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass gilt:

$$\left.\begin{aligned} & d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \\ & \text{Weiter gilt mit Satz 16 (iii):} \\ & d(\pi_C(x_n), \pi_C(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \end{aligned}\right\} \circledast$$

Wir haben:



$d(H(x,t), H(x_n,t))$

$= d(\gamma_x(t\cdot d(x,\pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t\cdot d(x_n,\pi_C(x_n))))$

$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(\gamma_x(t\cdot d(x,\pi_C(x))), \alpha_{x_n}(t\cdot d(x_n,\pi_C(x))))$

$+ d(\alpha_{x_n}(t\cdot d(x_n,\pi_C(x))), \gamma_{x_n}(t\cdot d(x_n,\pi_C(x_n))))$

$\overset{\boxed{\text{ÜA}}}{\leq} (1-t)\cdot d(x,x_n) + \underbrace{t\cdot d(\pi_C(x),\pi_C(x))}_{=0}$

$+ (1-t)\cdot \underbrace{d(x_n,x_n)}_{=0} + t\cdot d(\pi_C(x),\pi_C(x_n))$

$\overset{(*)}{\leq} (1-t)\cdot \frac{\varepsilon}{2} + t\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t\in[0,1] \quad \forall\, n \geq N_1$ (1)

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ groß genug mit:

$d(H(x_n,t_m), H(x_n,t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, m \geq N_2$ (2)

Damit erhalten wir:

$d(H(x_n,t_m), H(x,t))$

$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(H(x_n,t_m), H(x_n,t)) + d(H(x_n,t), H(x,t))$

$\overset{(1),(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, n,m \geq \max\{N_1, N_2\}$

$\square$

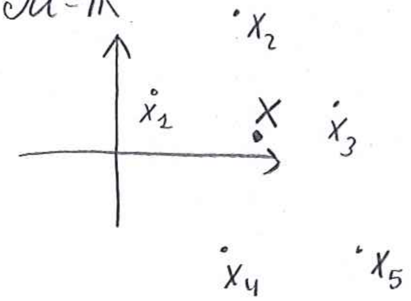
Zur Motivation der nächsten Resultate etwas Geschichte:

- Elie Cartan ('28) zeigte, dass für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M nichtpositiver Krümmung für jede endliche Menge ein Zentrum existiert, d.h.

  $\forall \{x_1, \dots, x_n\}$ hat $\Phi : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

  $$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} d(x, x_i)^2 \text{ ein Minimum.}$$

$M = \mathbb{R}^2$



Damit zeigte er, dass kompakte Isometriegruppen ($G \subseteq \mathrm{Isom}(M)$) von M immer einen Fixpunkt haben.

- Bruhat-Tits ('72) verallgemeinern dieses Resultat auf Euklidische Gebäude (eine spez. Klasse von CAT(0) Räumen)

$\rightsquigarrow$ heute für CAT(0)-Räume

Wiederholung:

- Sei X ein CAT(0)-Raum und $\emptyset \neq C \subseteq X$ konvex + vollständig.
  Dann gilt: $id_X \simeq \pi_C$ rel C.
  Insbesondere ist X kontrahierbar.

Wir studieren nun weitere Eigenschaften von CAT(0)-Räumen.

20. Definition

Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine beschränkte Teilmenge.
Wir kennen bereits den Durchmesser von A,

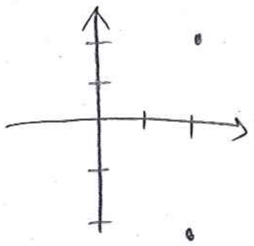
$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x \in y \in A\}$$

Nun definieren wir auch einen Radius:

$$\mathrm{rad}(A) := \inf\{\ \mathrm{rad}(x,A) = \sup\{d(x,a) \mid a \in A\} \mid x \in X\}$$

21. Beispiel

$X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(2,2), (2,-2)\}$



Sei $x = (1,0)$. Dann ist $\mathrm{rad}(x,A) = \sqrt{5}$

Sei $x' = (2,0)$. Dann ist $\mathrm{rad}(x',A) = 2$

Es gilt: $\mathrm{rad}(A) = 2$ und $A \subseteq \overline{B_2\big(\underbrace{(2,0)}_{\overset{!!}{=}\ c_A}\big)}$

Der Begriff des Radius ist also mit der Idee eines "Zentrums", $c_A \in X$, von A verbunden, welches zwar nicht in A liegen muss, aber die Mitte von A gut beschreibt. Im Allgemeinen muss ein Zentrum nicht existieren, bei CAT(0) Räumen kann man es aber konstruieren.

22. Theorem

Sei X ein vollständiger CAT(0) Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $c_A \in X$, das Zentrum von A, so dass gilt:

$$A \subseteq \overline{B_{\mathrm{rad}(A)}(c_A)}.$$

$$\mathrm{rad}(A) = \mathrm{rad}(c_A, A)$$

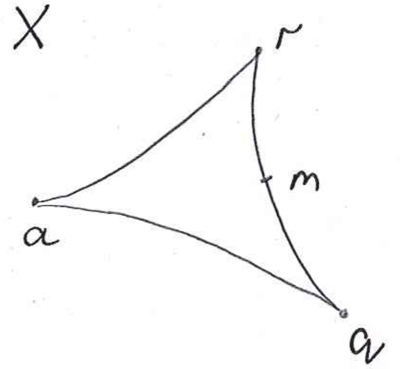
Beweis:

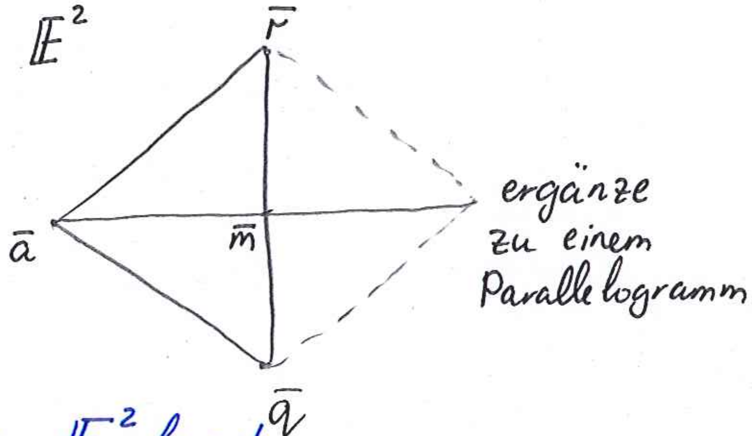
Vorüberlegungen:

Seien $q, r \in X$ bel. und $m \in X$ mit $d(q,m) = d(m,r) = \frac{d(q,r)}{2}$.

Sei weiter $a \in X$ bel. Wir betrachten

$$\Delta(a,r,q) \quad \text{und} \quad \bar{\Delta}(\bar{a},\bar{r},\bar{q})$$





Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{E}^2$ besagt:

$$(2 \cdot d_2(\bar{a},\bar{m}))^2 + d_2(\bar{r},\bar{q})^2 = 2 \cdot d_2(\bar{a},\bar{r})^2 + 2 \cdot d_2(\bar{a},\bar{q})^2$$

$$\Rightarrow d_2(\bar{a},\bar{m})^2 = \frac{1}{2} d_2(\bar{a},\bar{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\bar{a},\bar{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{r},\bar{q})^2$$

Es gilt also:

$$d(a,m)^2 \overset{CAT(0)}{\leq} d_2(\bar{a},\bar{m})^2$$

$$= \frac{1}{2} d_2(\bar{a},\bar{r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\bar{a},\bar{q})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{r},\bar{q})^2$$

$$= \frac{1}{2} d(a,r)^2 + \frac{1}{2} d(a,q)^2 - \frac{1}{4} d(r,q)^2$$

$$\overset{\sup_{a \in A}}{\Longrightarrow} rad(m,A)^2 \leq \frac{1}{2} rad(r,A)^2 + \frac{1}{2} rad(q,A)^2 - \frac{1}{4} d(r,q)^2$$

Es gilt: $rad(A) \leq rad(m,A)$

Damit erhalten wir:

$$rad(A)^2 \leq \frac{1}{2} rad(r,A)^2 + \frac{1}{2} rad(q,A)^2 - \frac{1}{4} d(r,q)^2$$

$$\Rightarrow d(r,q) \leq \sqrt{2 \cdot (rad(A,r)^2 + rad(q,A)^2) - 4 \cdot rad(A)^2} \quad (*)$$

Eindeutigkeit des Zentrums von A:

Angenommen z_1, z_2 sind beide Zentren von A, d.h.

$$\mathrm{rad}(z_1, A) = \mathrm{rad}(A)$$
$$\mathrm{rad}(z_2, A) = \mathrm{rad}(A)$$

Mit ⊛ folgt:

$$d(z_1, z_2) \leq \sqrt{2 \cdot (\mathrm{rad}(A)^2 + \mathrm{rad}(A)^2) - 4 \cdot \mathrm{rad}(A)^2} = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2.$$

Existenz des Zentrums:

Sei $x_n \in X$ eine Folge mit $\mathrm{rad}(x_n, A) \to \mathrm{rad}(A)$.
Ziel ist es zu zeigen, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Da X vollständig ist, konvergiert diese und das Zentrum von A ist $\lim_{n \to \infty} x_n$.

Sei $\varepsilon > 0$.
Sei weiter $\delta > 0$ die positive Lösung von

$$\delta^2 + 2 \cdot \mathrm{rad}(A) \cdot \delta - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ groß genug mit

$$\mathrm{rad}(x_n, A) \leq \mathrm{rad}(A) + \delta \qquad ⊛⊛$$

Wir betrachten ${⊛}^2$ für $r = x_n$ und $q = x_m$.

$$d(x_n, x_m)^2 \leq 2 \cdot (\mathrm{rad}(x_n, A)^2 + \mathrm{rad}(x_m, A)^2) - 4 \cdot \mathrm{rad}(A)^2$$
$$\overset{⊛⊛}{\leq} 2 \cdot (2 \cdot (\mathrm{rad}(A) + \delta)^2) - 4 \cdot \mathrm{rad}(A)^2 \quad \forall n, m \geq N$$
$$= 8\,\mathrm{rad}(A)\delta + 4\delta^2 \quad \forall n, m \geq N$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \mathrm{rad}(A)\delta + \delta^2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

□

23. Definition:

Eine Abbildung $f: X \to Y$ von metrischen Räumen (X, d_X), (Y, d_Y) heißt <u>isometrische Einbettung</u>, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:

$$d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v).$$

Wenn f zusätzlich surjektiv ist, heißt f <u>Isometrie</u>.

X und Y heißen isometrisch, falls es eine Isometrie zwischen X und Y existiert.

Die Isometriegruppe von X ist

$$\mathrm{Isom}(X) := \{ f: X \to X \mid f \text{ Isometrie} \}.$$

24. Bemerkung

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \to Y$ isometrische Einbettung. Dann gilt:

(i) f ist injektiv und stetig

(ii) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, so ist $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y.

(iii) Sind X und Y isometrisch, so sind sie als top. Räume homöomorph.

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{üA}}$

25. Definition

Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe. Eine <u>isometrische Wirkung</u> von G auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$.

Die Fixpunktmenge von Φ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Fix}_\Phi(G) = \{ x \in X \mid \Phi(g)(x) = x \ \forall g \in G \}.$$

26. Lemma

Sei X ein CAT(0)-Raum und $\Phi: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G)$ abgeschlossen.

Wenn $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$, dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G)$ konvex.

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{üA}}$

27. Theorem (Bruhat-Tits-Fixpunkttheorem (BTFT))

Sei X ein vollständiger CAT(0) Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung. Sei weiter $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt mit $\Phi(g)(A) = A \ \forall g \in G$.

Dann ist das Zentrum von A, $c_A \in \mathrm{Fix}_\Phi(G)$.

Beweis:

Sei $g \in G$ bel.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rad}(A) &= \mathrm{rad}(c_A, A) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sup_{a \in A} \{ d(c_A, a) \} \\
&\underset{\substack{\text{ist} \\ \text{Isometrie}}}{\overset{\Phi(g)}{=}} \sup_{a \in A} \{ d(\Phi(g)(c_A), \Phi(g)(a) \} \\
&\underset{\Phi(g)(A) = A}{=} \sup_{a \in A} \{ d(\Phi(g)(c_A), a \} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{rad}(\Phi(g)(c_A), A)
\end{aligned}
$$

$$\underset{\text{von } c_A}{\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow}} \quad \Phi(g)(c_A) = c_A .$$

$\square$

28. Korollar

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe und $\Phi : G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung.
Sei weiter $x \in X$ mit $G(x) := \{ \Phi(g)(x) \mid g \in G \}$ beschränkt.
Dann ist $\mathrm{Fix}_\Phi(G) \neq \emptyset$.

Beweis:

Betrachte $A := G(x)$. Dann ist $\Phi(g)(A) = A \ \forall g \in G$.
Mit BTFT folgt die Behauptung.

$\square$

29. Bemerkung

Jede isometrische Wirkung von einer endlichen Gruppe auf einen vollständigen CAT(0) Raum hat einen Fixpunkt.

Motivation für das nächste Korollar:

$$G \overset{\text{isometrisch}}{\underset{\substack{+\\ \text{"proper"}\\ +\\ \text{kokompakt}}}{\curvearrowright}} X \leftarrow \text{vollst. CAT(0)-Raum}$$

dann enthält G nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Gruppen. Genauer:

Sei $\mathcal{U}G_{\text{endl}} := \{ U \leq G \mid U \text{ Untergruppe und } \# U < \infty \}$

Wir def. auf $\mathcal{U}G_{\text{endl}}$ eine Äquivalenzrelation

$$U \sim V :\Leftrightarrow \exists\, g \in G \text{ mit } U = gVg^{-1}$$

$\mathcal{U}G_{\text{endl}}/\sim$ ist die Menge der Konjugationsklassen von endlichen Gruppen.

30. Korollar

Sei X ein vollst. CAT(0)-Raum, G eine Gruppe und $\Phi : G \to \text{Isom}(X)$ eine isometrische Wirkung, welche folgende Bedingungen erfüllt.

(i) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|\{ g \in G \mid \Phi(g)(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \}| < \infty$$

Man sagt dann, dass G <u>proper</u> auf X operiert.

(ii) Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, so dass

$$X = \bigcup_{g \in G} \Phi(g)(K)$$

Man sagt dann, dass G <u>kokompakt</u> auf X operiert.

Dann folgt $| \mathcal{U}G_{\text{endl}}/\sim | < \infty$.

Beweis:

- Sei K eine kompakte Teilmenge von X mit $\bigcup_{g\in\mathcal{G}} \Phi(g)(K) = X$.

- Wähle endliche Überdeckung von K durch Bälle $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ wie in der Definition von proper, also so dass die Teilmengen
$$\Gamma_i := \{ g\in\mathcal{G} \mid \Phi(g)(B_{\varepsilon_i}(x_i)) \cap B_{\varepsilon_i}(x_i) \neq \emptyset \}$$
endlich sind.

  Dann ist $\Sigma := \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ endlich.

- Sei nun $x\in X$ bel. Wir betrachten die Stabilisatorgruppe von x:
$$\mathcal{G}_x := \{ g\in\mathcal{G} \mid \Phi(g)(x) = x\}$$

- Wir werden zunächst zeigen, dass es nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen von $\mathcal{G}$ vom Typ $\mathcal{G}_x$ gibt.

- Da $X = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \Phi(g)(K)$ $\exists\, g'\in\mathcal{G}$ mit $\Phi(g')(K) \ni x$, also
$$x = \Phi(g')(k) \text{ für ein } k\in K$$
$$\Rightarrow \Phi(\underbrace{g'^{-1}}_{\overset{!!}{=}\,g})(x) = k \in \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_i}(x_i)$$

- Also ist $\Phi(g)(x) \in B_{\varepsilon_j}(x_j)$ für ein $j\in\{1,\dots,n\}$.

  Und somit $\mathcal{G}_{\Phi(g)(x)} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Sigma$.

  Also ist $\mathcal{G}_{\Phi(g)(x)}$ endlich und es gibt nur endlich viele solche $\mathcal{G}_{\Phi(g)(x)}$ mit $\Phi(g)(x)\in K$.

- Nun gilt aber weiter: $\mathcal{G}_{\Phi(g)(x)} = g\,\mathcal{G}_x\, g^{-1}$, d.h.

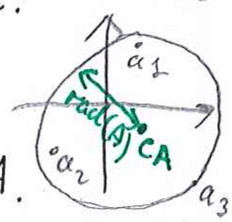
jedes beliebige G_x ist konjugiert zu einer endlich vielen Untergruppen $G_{\Phi(g)(x)}$, es gibt also nur endlich viele Konjugationsklassen von Gruppen G_x.

- Da jedes G_x endlich ist, hat es selbst nur endlich viele Konjugationsklassen von Untergruppen.
- Wir haben in Korollar 28 gesehen, dass jede endliche Untergruppe von G in einem G_x für geeignetes $x \in X$ enthalten ist, damit kann es auch nur endlich viele Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen von G geben. $\square$

Wiederholung:

- Sei X ein vollst. $CAT(0)$ Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ beschränkt. Dann $\exists!\, c_A \in X$ mit $A \subseteq B_{rad(A)}(c_A)$

  c_A: das Zentrum von A.



$\rightsquigarrow$ Sei $G \overset{\text{isom.}}{\curvearrowright} X$. Weiter ex. $x \in X$ mit $G(x)$ beschränkt. Dann ist $\mathrm{Fix}(G) \neq \emptyset$.

$\rightsquigarrow$ Insbesondere: $|G| < \infty$, $G \overset{\text{isom}}{\curvearrowright} X \Rightarrow \mathrm{Fix}(G) \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow$ $G \underset{\substack{\text{proper} \\ + \\ \text{kokompakt}}}{\overset{\text{isometr.}}{\curvearrowright}} X \Rightarrow \left| UG_{\text{endl}}/_\sim = \{ [U] \mid U \leq G \text{ Untergruppe}, \#U < \infty, U \sim V \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ mit } U = gUg^{-1} \} \right| < \infty.$

Metrische Vervollständigung

Viele Sätze die wir über $CAT(0)$-Räume bewiesen haben, hatten als Voraussetzung die Vollständigkeit. Der Vorteil an diesem Vorgehen ist, dass wir einen $CAT(0)$-Raum immer als eine dichte Teilmenge eines vollständigen $CAT(0)$-Raumes realisieren können.

Weiter lässt sich jede Isometrie von $CAT(0)$-Räumen eindeutig zu einer Isometrie von vollständigen $CAT(0)$-Räumen erweitern.

$$\underset{CAT(0)\text{-Raum}}{X} \xhookrightarrow{\text{isometr.}} \underset{\text{vollst. } CAT(0)\text{-Raum}}{\hat{X}}$$

$$\mathrm{Isom}(X) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\hat{X})$$

$$f \longmapsto \hat{f} : \hat{X} \to \hat{X} \text{ mit } \hat{f}|_X = f$$

31. Erinnerung:
Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{X},\hat{d})$ und eine isometrische Einbettung $\varphi: X \to \hat{X}$ mit $\overline{\mu(X)} = \hat{X}$, d.h. $\mu(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$. $(\hat{X},\hat{d})$ ist bis auf Isometrien eindeutig bestimmt und heißt die <u>metrische Vervollständigung von X</u>.

<u>Beweisskizze:</u>

<u>Zur Konstruktion von $(\hat{X},\hat{d})$:</u>

Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchy-Folgen in X.
Definiere folgende Äquivalenzrelation auf $CF(X)$:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow (d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine gegen Null konvergente Folge.

Setze $\hat{X} := CF(X)/_\sim$ und $\hat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) := \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$.

Definiere weiter
$$\varphi: X \to \hat{X}$$
$$x \mapsto [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \text{ mit } x_n = x \ \forall n\in\mathbb{N}.$$
$\square$

32. Erinnerung

(i) Sei $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. f heißt <u>λ-Lipschitz</u>, wenn für alle $u,v\in X$ gilt: $d_Y(f(u),f(v)) \le \lambda \cdot d(x,x')$.
Insbesondere ist jede isometrische Einbettung 1-Lipschitz.

(ii) Sei $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ eine λ-Lipschitz-Abbildung zwischen metrischen Räumen $(X,d_X),(Y,d_Y)$. Dann läßt sich f eindeutig zu $\hat{f}:(\hat{X},\hat{d}_X)\to(\hat{Y},\hat{d}_Y)$, $[(x_n)_n]\mapsto[f(x_n)_n]$ fortsetzen und $\hat{f}$ ist wieder λ-Lipschitz.

(iii) Sei $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ eine isom. Einbettung. Dann ist $\hat{f}:\hat{X}\to\hat{Y}$ wieder eine isom. Einbettung.

Beweis: $\boxed{\text{üA}}$

Theorem:
Die metrische Vervollständigung eines CAT(0) Raumes ist ein CAT(0)-Raum.

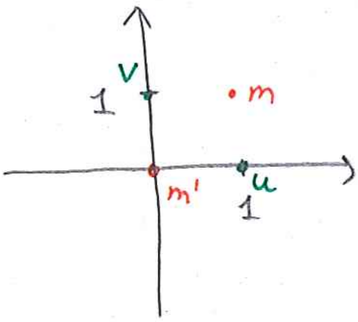
Um dieses Theorem zu beweisen brauchen wir ein wenig Vorarbeit.

33. Definition
Ein metrischer Raum (X,d) hat <u>Mittelpunkte</u>, wenn es zu allen $u,v \in X$ stets <u>ein</u> $m \in X$ gibt mit:

$$d(u,m) = d(m,v) = \frac{1}{2} d(u,v)$$

Beachte: m muss nicht eindeutig sein.

<u>z.B.:</u> $(X,d) = (\mathbb{R}^2, d_1)$ $\quad d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$



Sei $u=(1,0)$ und $v=(0,1)$. Dann ist $d_1(u,v) = 2$. Die Punkte $m=(1,1)$ und $m' = (0,0)$ sind beide Mittelpunkte.

34. Beispiele:

(i) $\mathbb{Q}$ hat Mittelpunkte

(ii) jeder geodätischer Raum hat Mittelpunkte.
Genauer: seien $u,v \in X$ und $\gamma: [0,l] \to X$, $u \rightsquigarrow v$ eine Geodäte. Dann ist $\gamma\left(\frac{l}{2}\right)$ ein Mittelpunkt von u und v.

(iii) jeder eindeutig geodätischer Raum hat eindeutige Mittelpunkte

$\rightsquigarrow$ CAT(0)-Räume haben eindeutige Mittelpunkte (diese Eigenschaft haben wir schon öfters in den Beweisen benutzt),
d.h. es gibt eine Mittelpunktsabbildung:

$$m: X \times X \to X$$
$$(u,v) \mapsto m(u,v)$$

35. Lemma

Ein vollständiger metrischer Raum X, der Mittelpunkte hat, ist geodätisch.

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$

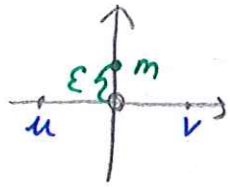
36. Definition

(i) Ein metrischer Raum X hat <u>ungefähre Mittelpunkte</u>, wenn es zu allen $u, v \in X$, $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit

$$d(u,m) \leq \frac{1}{2} d(u,v) + \varepsilon$$

$$d(m,v) \leq \frac{1}{2} d(u,v) + \varepsilon$$

[z.B: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat ungefähre Mittelpunkte



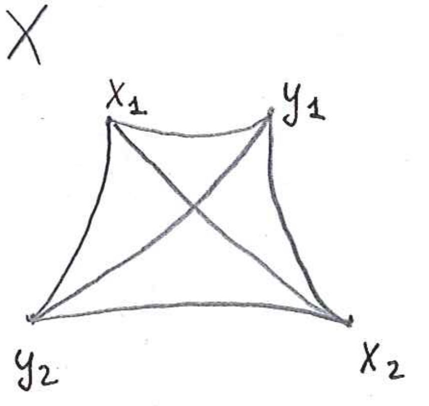
]

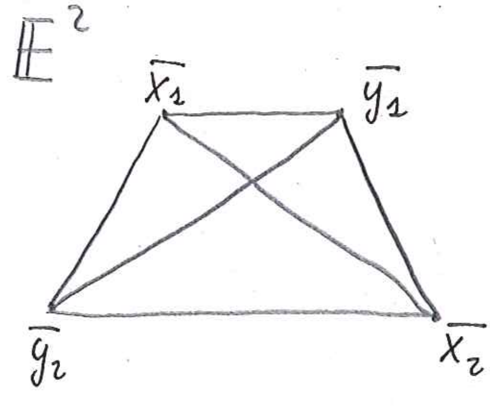
(ii) Ein metrischer Raum X erfüllt die <u>CAT(0)-4-Punkt-Bedingung</u>, wenn es zu allen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ stets $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2 \in \mathbb{E}^2$ gibt mit

$$d(x_i, y_j) = d_2(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ für } i,j \in \{1,2\} \text{ und}$$

$$d(x_1, x_2) \leq d_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$d(y_1, y_2) \leq d_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$$





Wir werden gleich sehen, dass man CAT(0)-Räume darüber charakterisieren kann.
Vorher noch ein Lemma.

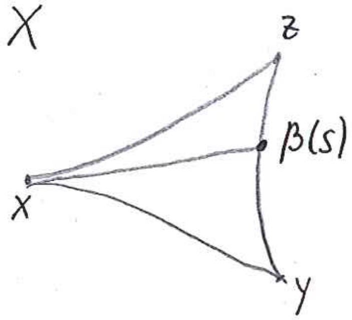
37. Lemma

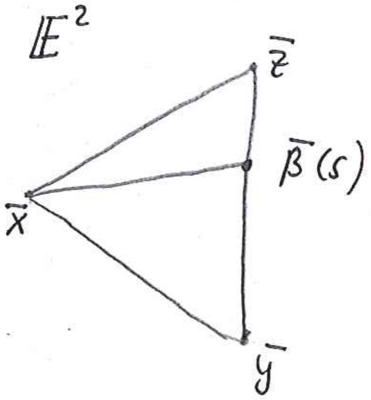
Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn für jedes geodätische Dreieck:

$$\Delta(x, y, z, \alpha, \underset{\substack{\| \\ y \rightsquigarrow z}}{\beta}, \gamma) \text{ mit Vergleichsdreieck } \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma) \text{ in } \mathbb{E}^2$$

gilt:

$$d(x, \beta(s)) \leq d_2(\bar{x}, \bar{\beta}(s)) \text{ für alle } s \in [0, d(y,z)]$$





Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$

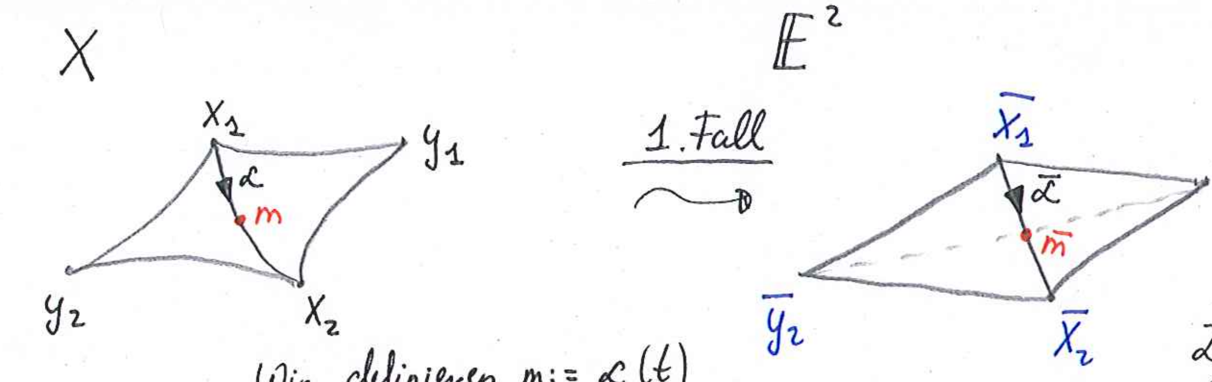
38. Theorem

Ein vollständiger metrischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn er ungefähre Mittelpunkte hat und alle 4-Tupel von Punkten die CAT(0)-4-Punkt-Bedingung erfüllen.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Angenommen, X ist CAT(0). Dann hat X Mittelpunkte, also auch ungefähre Mittelpunkte.

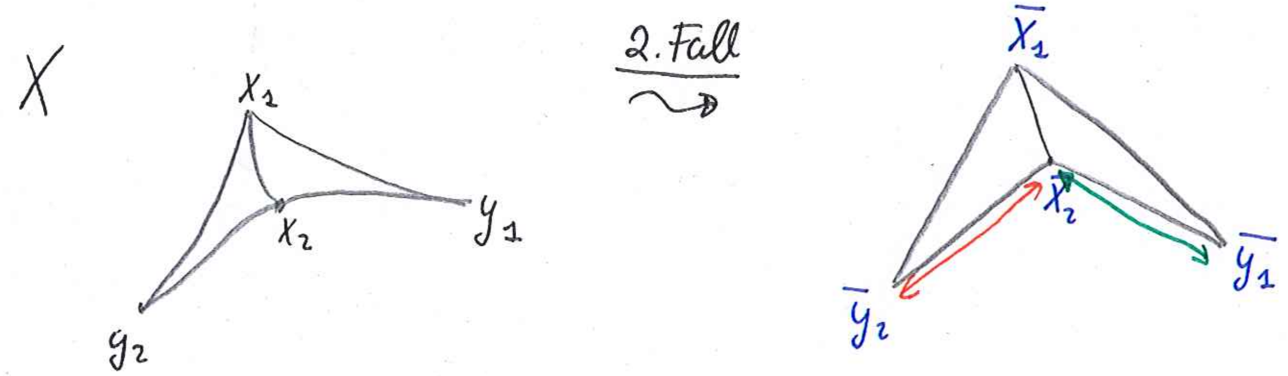
Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$. Betrachte euklidische Vergleichsdreiecke zu $\Delta(x_1, x_2, y_2)$ und zu $\Delta(x_1, x_2, y_1)$.



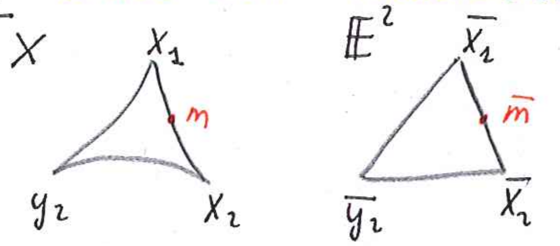
$\bar{\alpha}: \bar{x}_1 \rightsquigarrow \bar{x}_2$

$\bar{\alpha}(t) = \bar{m}$ ← der Schnittpunkt der zwei Diagonalen

Wir definieren $m := \alpha(t)$



1. Fall: Wenn das resultierende Viereck konvex ist, so gilt:



$$d(y_2, m) \overset{CAT(0)}{\leq} d_2(\bar{y}_2, \bar{m})$$

Genauso: $d(y_1, m) \overset{CAT(0)}{\leq} d_2(\bar{y}_1, \bar{m})$.

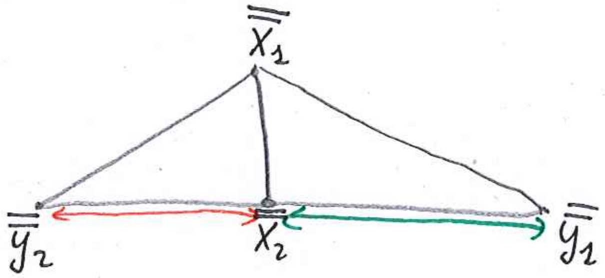
Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(y_1, m) + d(y_2, m) \\ &\overset{CAT(0)}{\leq} d_2(\bar{y}_1, \bar{m}) + d_2(\bar{y}_2, \bar{m}) \\ &= d_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \end{aligned}$$

$\bar{m}$ liegt auf der Geodäte zwischen $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ (da das Viereck konvex ist)

Weiter gilt: $d(x_1, x_2) = d_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

<u>2. Fall:</u> Wenn das Viereck nicht konvex ist, betrachte folgendes Dreieck in $\mathbb{E}^2$:



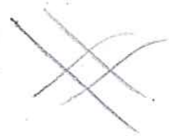
mit $d_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = d_2(\bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{y}}_2)$ $\quad d_2(\bar{\bar{y}}_2, \bar{\bar{x}}_1) = d_2(\bar{y}_2, \bar{x}_1)$

$d_2(\bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{y}}_1) = d_2(\bar{x}_2, \bar{y}_1)$ $\quad d_2(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{y}}_1) = d_2(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$

Wir erhalten:

$$d_2(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2) \geq d_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} d_2(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2) &= d_2(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{x}}_2) + d_2(\bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{y}}_2) \\ &= d_2(\bar{y}_1, \bar{x}_2) + d_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ &= d(y_1, x_2) + d(x_2, y_2) \\ &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(y_1, y_2) \end{aligned}$$



„$\Leftarrow$" Jetzt nehmen wir an, X ist vollständig, hat ungefähre Mittelpunkte und erfüllt die CAT(0)-4-Punkt Bedingung.

<u>Beh:</u> X hat Mittelpunkte (und ist daher nach Lemma 35 geodätisch)

Sind $u, v \in X$ mit $d(u,v) = 2 \cdot r$ und ungefähren Mittelpunkten m, m':

$$\left.\begin{aligned} &d(u,m) \\ &d(v,m) \\ &d(u,m') \\ &d(v,m') \end{aligned}\right\} \leq r + \varepsilon$$

Wiederholung:

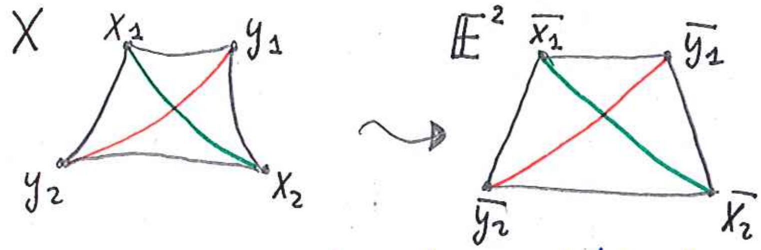
Ziel: Theorem: Die metrische Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes ist ein CAT(0)-Raum.

⇝ um dies zu zeigen, brauchen wir eine äquivalente Umformulierung der CAT(0)-Bedingung.

<u>38. Theorem:</u>

Sei X ein vollst. metrischer Raum.

X ist CAT(0) $\Leftrightarrow$ X hat ungefähre Mittelpunkte und alle 4-Tupel von Punkten erfüllen die CAT(0)-4-Punkt Bedingung.



„$\Leftarrow$" Jetzt nehmen wir an, X ist vollständig, hat ungefähre Mittelpunkte und erfüllt die CAT(0)-4-Punkt Bedingung.

Zuerst zeigen wir, dass X geodätisch ist.
Nach Lemma 35 reicht es zu zeigen, dass X Mittelpunkte hat.
Seien $u, v \in X$ beliebig. Sei weiter $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Da X ungefähre Mittelpunkte hat, existiert $m_r \in X$ mit

$$d(u, m_r) \leq \frac{1}{2} d(u,v) + \varepsilon_r$$
$$d(v, m_r) \leq \frac{1}{2} d(u,v) + \varepsilon_r$$

Sei $(m_r)_{r\in\mathbb{N}}$ eine Folge von ungefähren Mittelpunkten mit Fehlerterm $\varepsilon_r := \frac{1}{r}$.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $(m_r)_{r\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Der Grenzwert $m := \lim_{r\to\infty} m_r$ ist dann ein Mittelpunkt, denn:

$$d(u, m_r) \leq \frac{1}{2}\, d(u,v) + \varepsilon_r$$

$$\overset{\lim\limits_{r\to\infty}}{\Longrightarrow} \lim_{r\to\infty} d(u, m_r) \leq \frac{1}{2}\, d(u,v)$$

$$\overset{d \text{ stetig}}{\Longrightarrow} d(u, m) \leq \frac{1}{2}\, d(u,v)$$

Genauso: $d(v, m) \leq \frac{1}{2}\, d(u,v)$

Insgesamt: $d(u,m) + d(m,v) \leq d(u,v)$

Es gilt aber auch: $d(u,m) + d(m,v) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} d(u,v)$

Folglich erhalten wir Gleichheit:

$$\underbrace{d(u,m)}_{\leq \frac{1}{2} d(u,v)} + \underbrace{d(m,v)}_{\leq \frac{1}{2} d(u,v)} = d(u,v)$$

$$\Rightarrow \quad d(u,m) = d(m,v) = \frac{1}{2}\, d(u,v).$$

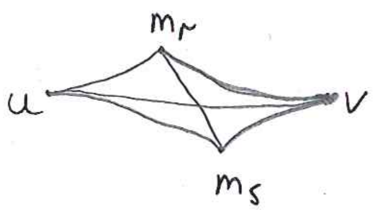
Sei $\varepsilon > 0$.

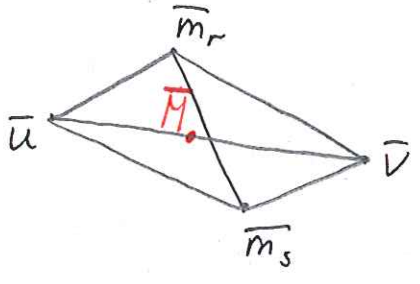
Sei weiter $\delta > 0$ die pos. Lösung von $0 = -\varepsilon^2 + 4\delta^2 + 8r\delta$

Wir definieren $d(u,v) =: 2r$. Da $(\varepsilon_r)_{r\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\left.\begin{array}{l} d(u, m_r) \\ d(v, m_r) \\ d(u, m_s) \\ d(v, m_s) \end{array}\right\} \leq r + \delta \quad \forall\, r, s \geq N \qquad (*)$$

Betrachte das 4-Tupel (u, m_r, v, m_s) und die Vergleichspunkte $(\bar{u}, \bar{m}_r, \bar{v}, \bar{m}_s)$ in $\mathbb{E}^2$



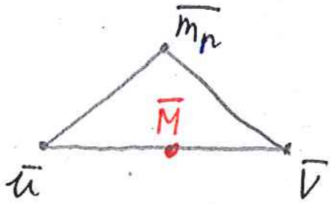


$\bar{M}$ Mittelpunkt von $\bar{u}$ und $\bar{v}$

Nach Voraussetzung hat X die CAT(0)-4-Punkt Bedingung, also gilt:

$$\left.\begin{array}{l} d(u,v) \leq d_2(\bar{u},\bar{v}) \\ d(m_r, m_s) \leq d_2(\overline{m_r}, \overline{m_s}) \end{array}\right\} \circledast\circledast$$

Aus der Parallelogrammgleichung für $\mathbb{E}^2$ kann man folgern:



$$d_2(\overline{m_r}, \bar{M})^2 = \frac{1}{2} d_2(\bar{u}, \overline{m_r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\overline{m_r}, \bar{v})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2 \quad \circledast\circledast\circledast$$

(siehe Seite 22).

Genauso für $d_2(\overline{m_s}, \bar{M})^2$.

Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
d(m_r, m_s) &\overset{\circledast\circledast}{\leq} d_2(\overline{m_r}, \overline{m_s}) \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\overline{m_r}, \bar{M}) + d_2(\bar{M}, \overline{m_s}) \\
&\overset{\circledast\circledast\circledast}{=} \sqrt{\frac{1}{2} d_2(\bar{u}, \overline{m_r})^2 + \frac{1}{2} d_2(\overline{m_r}, \bar{v})^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2} \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{2} d_2(\bar{u}, \overline{m_s})^2 + \frac{1}{2} d_2(\overline{m_s}, \bar{v})^2 + \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} d(u, m_r)^2 + \frac{1}{2} d(m_r, v)^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2} \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{2} d(u, m_s)^2 + \frac{1}{2} d(m_s, v)^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2} \\
&\overset{\circledast}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r+\delta)^2 - \frac{1}{4} d_2(\bar{u},\bar{v})^2} \qquad \forall\, r,s \geq N \\
&\overset{\circledast\circledast}{\leq} 2 \cdot \sqrt{(r+\delta)^2 - \frac{1}{4} d(u,v)^2} \qquad \forall\, r,s \geq N \\
&= 2 \cdot \sqrt{r^2 + 2r\delta + \delta^2 - r^2} \\
&= \varepsilon \qquad \forall\, r,s \geq N
\end{aligned}$$

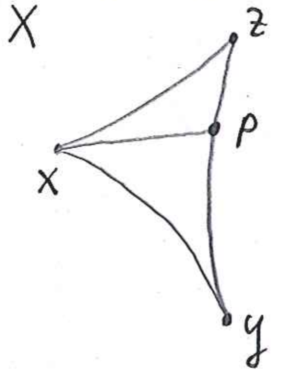
die Seitenlängen in X und $\mathbb{E}^2$ sind gleich lang

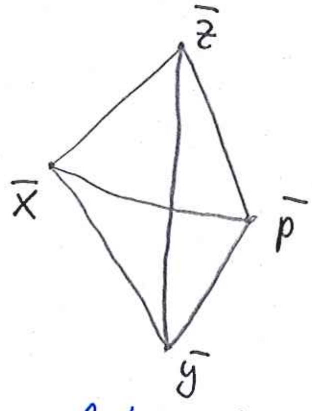
$d(u,v) = 2r$

$\Rightarrow (m_r)_{r\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Sei $\Delta(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ ein geod. Dreieck in X. Wir betrachten die Bedingung aus Lemma 37.

Sei $p := \beta(s) \in \text{Bild}\,(\beta : y \rightsquigarrow z)$ beliebig.





Zu den Punkten (x,y,p,z) betrachten wir die Vergleichspunkte $(\bar{x},\bar{y},\bar{p},\bar{z})$.

Es gilt: $\quad d(x,p) \leq d_2(\bar{x},\bar{p})$ und $d(z,y) \leq d_2(\bar{z},\bar{y})$ $\circledast$

Beh: $(\bar{x},\bar{z},\bar{p},\bar{y})$ ist ein Vergleichsdreieck.

Wir müssen zeigen, dass gilt: $\bar{p} \in \text{Bild}\,(\bar{\beta} : \bar{y} \rightsquigarrow \bar{z})$.

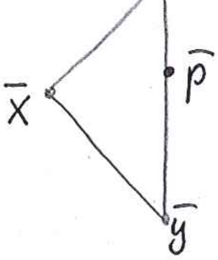
Es gilt:

$$d_2(\bar{y},\bar{z}) \overset{\circledast}{\geq} d(y,z) = d(y,p) + d(p,z)$$
$$= d_2(\bar{y},\bar{p}) + d_2(\bar{p},\bar{z})$$

und

$$d_2(\bar{y},\bar{z}) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d_2(\bar{y},\bar{p}) + d_2(\bar{p},\bar{z})$$

Folglich liegt $\bar{p}$ auf der Geodäte $\bar{\beta}$, d.h. wir haben ein Vergleichsdreieck.



39. Theorem:
Die metrische Vervollständigung eines CAT(0)-Raumes ist ein CAT(0)-Raum.

Beweis:

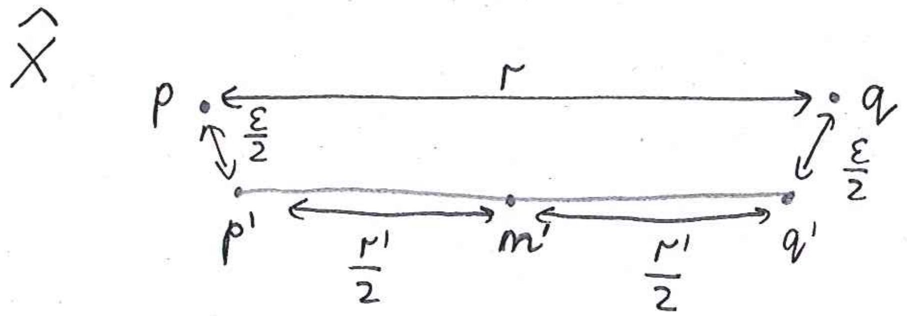
Sei X ein CAT(0)-Raum mit Vervollständigung $\hat{X}$.
Wir zeigen, dass die Bedingungen aus Theorem 38 erfüllt sind.

Zuerst zeigen wir, dass $\hat{X}$ ungefähre Mittelpunkte hat.

Seien $p, q \in \hat{X}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $p', q' \in X$ mit

$$d(p,p') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(q,q') < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

und $m' \in X$ Mittelpunkt von p' und q'.
Sei $r = d(p,q)$ und $r' = d(p',q')$



Wir erhalten:

$$d(p,m') \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p,p') + d(p',m')$$
$$\overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r'}{2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} + \varepsilon$$

$r' = d(p',q')$
$\leq d(p',p) + d(p,q) + d(q,q')$
$\leq \varepsilon + r$

Genauso: $d(q,m') \leq \frac{r}{2} + \varepsilon$, d.h. $\hat{X}$ hat ungefähre Mittelpunkte.

Sei jetzt $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \hat{X}^4$. Wähle Folgen

$$\begin{array}{cccc} (x_1(n), & y_1(n), & x_2(n), & y_2(n)) \in X^4 \text{ mit} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{array}$$

und CAT(0) - 4 - Punkt Vergleichspunkte

$$(\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}) \in (\mathbb{E}^2)^4$$

OE: $\overline{x_1(n)} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\leadsto$ die Folge hat einen Häufungspunkt in $(\mathbb{R}^2)^4$, weil sie beschränkt ist.

Wir dürfen OE annehmen, dass wir Konvergenz haben, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{x_1(n)}, \overline{y_1(n)}, \overline{x_2(n)}, \overline{y_2(n)}) = (0, \overline{y_1}, \overline{x_2}, \overline{y_2}).$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x_i, y_j) &= d(\lim_n x_i(n), \lim_n y_j(n)) \\ &\overset{d \text{ stetig}}{=} \lim_n d(x_i(n), y_j(n)) \\ &= \lim_n d_2(\overline{x_i(n)}, \overline{y_j(n)}) \\ &\overset{d_2 \text{ stetig}}{=} d_2(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \end{aligned}$$

Genauso:
$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \\ d(y_1, y_2) &\leq d_2(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \end{aligned}$$

$\square$