§4 Lokal kompakte und profinite Gruppen

1. <u>Erinnerung</u> Sei G eine Gruppe und sei die unterliegende Menge G mit einer Topologie versehen. Wir nennen G eine <u>topologische Gruppe</u>, wenn gilt:

(TG0) Punkte in G sind abgeschlossen

(TG1) Die Abbildung $q: G\times G \to G$, $(a,b) \mapsto a^{-1}b$ ist stetig

Es folgt, dass die Abbildungen $i: G \to G$, $a \mapsto a^{-1} = q(a,1)$

sowie $m: G\times G \to G$, $a,b \mapsto ab = q(i(a),b)$ stetig sind.

<u>Klar</u> Jede Untergruppe $H \leq G$ einer top. Gruppe ist bezüglich der Unterraumtopologie wieder eine top. Gruppe.

<u>Bem</u> Manche Autoren lassen (TG0) weg, dann gelten aber viele Sätze nicht mehr. Wir sehen gleich, dass topologische Gruppen stets regulär (T_3-Räume) sind.

<u>Bsp</u> • Jede Gruppe G ist bezüglich der diskreten Topologie eine topologische Gruppe.

• Sei F topologischer Körper. Dann ist $GL_n F$ top. Gruppe bzgl. der Unterraum-

Topologie $GL_n(F) \subseteq F^{n\times n}$. Dann:

$a \cdot b = c$ $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ hängt stetig von a, b ab

$a^{-1} = c = a^{\#} \cdot \det(a)^{-1}$ $\quad$ det ist Polynomfunktion, also stetig

2. **Lemma** Sei G eine topologische Gruppe, sei $H \leq G$ Untergruppe. Dann ist $\overline{H}$ ebenfalls Untergruppe. Falls H abelsch ist, so auch $\overline{H}$. Falls H normal in G ist, so auch $\overline{H}$.

Beweis q ist stetig $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} q(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{H} \\ \quad \| \\ q(\overline{H} \times \overline{H}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{H} \text{ Untergruppe}$$

H abelsch $\Leftrightarrow$ $c(H \times H) = \{1\}$ $\qquad c(a,b) = [a,b]$ stetig

$$\Rightarrow c(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{\{1\}} = \{1\}$$
$$\| $$
$$c(\overline{H} \times \overline{H})$$

Sei H normal, $g \in G$. Dann ist $h \mapsto ghg^{-1}$ stetig, also

$g \overline{H} g^{-1} \subseteq \overline{H}$ $\square$

Lemma Ist G top. Gruppe, $X, U \subseteq G$ Teilmengen, U offen, so sind UX und XU offen. $\square$

Beweis $UX = \bigcup \{ \underbrace{Ux}_{\text{offen}} \mid x \in X \}$

Folglich sind q und in offene Abbildungen.

Korollar Sei G eine topologische Gruppe, sei $H \leq G$ Untergruppe. Wenn H eine nicht leere offene Teilmenge enthält, so ist H offen und abgeschlossen.

Bew. Sei $\emptyset \neq U \subseteq H$ offen. Es folgt, dass $H = UH$ offen ist. Weiter gilt $G - H = \bigcup \{ \underbrace{gH}_{\text{offen}} \mid g \in G - H \}$, also ist $G - H$ offen. $\square$

Bem. Wir haben immer wieder benutzt:

- Für jedes $a \in G$ sind die Abbildungen $\rho_a : x \mapsto xa$, $\lambda_a : x \mapsto ax$, $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$ Homöomorphismen, mit Inversen $\rho_{a^{-1}}, \lambda_{a^{-1}}, \tau_{a^{-1}}$.
- Ist $U \subseteq G$ offene Einsumgebung und $g \in G$, so sind gU und Ug Umgebungen von g.
- Ist $V \subseteq G$ Umgebung von $g \in G$, so sind $g^{-1}V$ und Vg^{-1} Einsumgebungen.

3. **Satz** Sei G eine topologische Gruppe, sei $H \leq G$ abgeschlossene Untergruppe, sei $\pi : G \to G/H$ die Projektion $\pi(g) = gH$.

Wir versehen G/H mit der Quotiententopologie bezüglich π, d.h. $W \subseteq G/H$ ist offen, wenn $\pi^{-1}(W) \subseteq G$ offen ist. Dann gilt:

(i) $\pi : G \to G/H$ ist stetig und offen

(ii) Die Wirkung $G \times G/H \xrightarrow{\bar{m}} G/H$, $(a, gH) \mapsto agH$ ist stetig und offen.

(iii) Ist $H \trianglelefteq G$, so ist G/H topologische Gruppe.

(iv) G/H ist T_3-Raum, insbesondere Hausdorffsch.

Beweis: (i) π ist stetig nach Definition. Für $U \subseteq G$ offen ist $\pi^{-1}\pi(U) = UH$ offen $\Rightarrow \pi(U)$ offen.

(ii) Betrachte

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ {\scriptstyle id \times \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G/H & \xrightarrow{\bar{m}} & G/H \end{array}$$

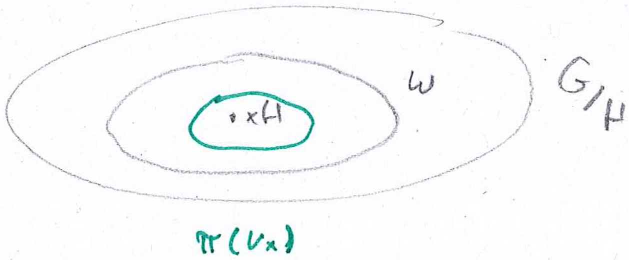
$\pi \circ m$ ist stetig, id und π sind offen $\Rightarrow$ $id \times \pi$ ist offen $\Rightarrow$ $\bar{m}$ ist stetig.

Weiter ist m offen (Lemma §4.2), also auch $\pi \circ m$, und $id \times \pi$ ist surjektiv $\Rightarrow$ $\bar{m}$ offen

(iii)
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, "\bar{q}"] & G/H \end{tikzcd}$$

Da $\pi \times \pi$ offen ist, ist $\bar{q}$ stetig. Weiter ist $\pi^{-1}(\{aH\}) = aH \Rightarrow \{aH\} \subseteq G/H$ abgeschlossen. Also erfüllt G/H (TG0) und (TG1).

(iv) Sei $W \subseteq G/H$ offen mit $xH \in W$. Wir zeigen: es gibt eine offene Einsumgebung $V \subseteq G$ mit $\overline{\pi(Vx)} \subseteq W$. Da $\pi(Vx)$ offen ist und (i), folgt die Regularität von G/H.



Wähle Einsumgebung $U \subseteq G$ mit $\pi(Ux) \subseteq W$ (das geht, weil π stetig ist). Wähle Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass $\underbrace{q(V \times V)}_{= V^{-1}V} \subseteq U$ gilt (Stetigkeit von q)

Beh: $\overline{\pi(Vx)} \subseteq W$. Sei $aH \in \overline{\pi(Vx)}$.

Es folgt $\underbrace{\pi(Va)}_{\text{offen}} \cap \pi(Vx) \neq \emptyset$

also gibt es $v_1, v_2 \in V$, $h \in H$ mit

$$v_1 a = v_2 x h \Rightarrow a = v_1^{-1} v_2 x h \in U x h$$

$$\Rightarrow \pi(a) = aH \in \pi(Ux) \subseteq W \qquad \square$$

Korollar Jede topologische Gruppe ist T_3-Raum (Regulär) und insbesondere Hausdorffsch.

Beweis $G \cong G/_{\{1\}}$ $\square$

4. Zusammenhang und Einskomponente

Def Sei G eine topologische Gruppe. Sei

$$G^0 = \bigcup \{ X \subseteq G \mid X \text{ zush. Teilmenge mit } 1 \in X \}$$

Es folgt: G^0 ist zusammenhängend.
Man nennt G^0 die Einskomponente in G.

Satz Sei G topologische Gruppe. Dann ist G^0 ein abgeschlossener Normalteiler in G.

Beweis Klar: $1 \in G^0$

$$X = q(\underbrace{G^0 \times G^0}_{\text{zush}}) \Rightarrow X \text{ zush}, 1 \in X \Rightarrow X \subseteq G^0$$

$\Rightarrow G^0$ ist Untergruppe.

Weiter $\overline{G^0}$ zush, $1 \in \overline{G^0} \Rightarrow \overline{G^0} \subseteq G^0 \Rightarrow G^0 = \overline{G^0}$.

Sei $g \in G$. Dann ist $X = gG^0g^{-1}$ zush, $1 \in X$

$\Rightarrow X \subseteq G^0$. Folglich ist $G^0 \trianglelefteq G$. $\square$

5. <u>Def</u> Ein topologischer Raum X heißt <u>total unzusammenhängend</u>, wenn alle zush. Teilmengen von X einpunktig sind.

<u>Bsp</u> • $\mathbb{Q}$ total unzush.

• $C = \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ Cantormenge total unzush.

• X diskret

<u>Satz</u> Sei G topologische Gruppe. Dann ist G/G^0 total unzusammenhängend.

<u>Beweis</u> Setze $H = G/G^0$, nach §4.3 ist H topologische Gruppe und $\pi : G \to H$ ist offen und stetig. Setze $A = H^0$, zz: $A = \{1_H\}$.

Sei $B = \pi^{-1}(A) \subseteq G$. Es folgt $B \leq G$ abg. Untergruppe und $G^0 \subseteq B$. Dann ist die Einschränkung $\pi : B \to A$ eine Quotientabbildung.

Sei $V \subseteq B$ offen und abgeschlossen, mit $1 \in V$.

Für alle $v \in V$ folgt $vG_0 \subseteq V$, da G_0 zush.

Also ist $V = \pi^{-1}\pi(V) \Rightarrow \pi(V)$ offen und abgeschlossen in $A \Rightarrow A = \pi(V) \Rightarrow V = B$.

Folglich ist $B \subseteq G$ zush., also $G^0 = B$

$\Rightarrow A = \{1_H\}$

$\square$

Korollar Sind G, H top. Gruppen, $\varphi : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus. Wenn H total unzush. ist, so faktorisiert φ durch $\pi : G \to G/G^0$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/G^0 \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Denn: $\varphi(G^0) \subseteq H$ ist zush $\Rightarrow \varphi(G^0) = \{1_H\}$. $\square$

6. **Beispiel** Ist $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie von endlichen Gruppen, versehen mit der diskreten Topologie, so ist $G = \prod_{i \in I} F_i$ eine kompakte total unzush. topologische Gruppe.

Denn: G ist kompakt nach Satz von Tychonov.

$\psi : G \times G \xrightarrow{q} G \xrightarrow{\pi_j} F_j$ ist stetig für jedes j, denn $\psi^{-1}(\{g_j\}) = \{((a_k), (b_k)) \mid a_j^{-1} b_j = g_j\} \subseteq G \times G$ offen.

Ist $g, h \in G$, $g \neq h$, so existiert ein $j \in I$ mit $g_j \neq h_j \Rightarrow \pi_j(g) \neq \pi_j(h)$ und F_j ist total unzush., weil diskret. Also können g, h nicht in einer zush. Teilmenge von G liegen. $\square$

7. **Satz** Seien G, H topologische Gruppen, sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist stetig.

(ii) Es gibt ein $g \in G$, so dass für jede Umgebung $W \subseteq H$ von $\varphi(g) = h$ eine Umgebung $V \subseteq G$ existiert mit $\varphi(V) \subseteq W$ (d.h. φ ist stetig im Punkt g)

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) klar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $a \in G$ beliebig, sei W Umgebung von $\varphi(a) = b$. Dann ist $hb^{-1}W$ Umgebung von $h = \varphi(g)$. Sei U Umgebung von g mit $\varphi(U) \subseteq hb^{-1}W$. Dann ist $ag^{-1}U$ Umgebung von a und $\varphi(ag^{-1}U) = bh^{-1}\varphi(U) \subseteq bh^{-1}hbW = W$. Damit ist φ stetig im Punkt a. $\square$

Jetzt betrachten wir lokal kompakte Gruppen.

Erinnerung: jeder lokal kompakte Raum ist regulär; jeder kompakte Raum ist normal. #

8. **Def** Ein Hausdorffraum X heißt Baire-Raum oder Bairesch, wenn er eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(B) Ist $U_n \subseteq X$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ dicht.

(B') Ist $A_n \subseteq X$ abg. mit leerem Innern für alle $n \in \mathbb{N}$, so hat $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ leeres Inneres.

⌜ Zur Äquivalenz: $Z \subseteq X$ dicht $\iff \overline{Z} = X$
$\iff X - Z$ hat leeres Inneres ⌟

Theorem (Baire) Jeder lokalkompakte Raum und jeder vollständige metrische Raum ist Baire-Raum.

Beweis Sei $U_n \subseteq X$ offen und dicht, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\emptyset \neq W \subseteq X$ offen. Zu zeigen: $W \cap \bigcap_{n \geq 0} U_n \neq \emptyset$.

X lokalkompakt: Wähle $V_0 \neq \emptyset$ offen mit $\overline{V_0}$ kompakt, $\overline{V_0} \subseteq W \cap U_0$ (X ist lokalkompakt T_3-Raum), dann $V_1 \neq \emptyset$ offen mit $\overline{V_1} \subseteq V_0 \cap U_1$ usw. Es folgt $\bigcap_{j \geq 0} \overline{V_j} \neq \emptyset$, da $\overline{V_0}$ kompakt.

$$\bigcap_{j \geq 0} \overline{V_j} \subseteq W \cap \bigcap_{j \geq 0} U_j$$

<u>X vollständig</u> Wähle $V_0 \neq \emptyset$ offen mit $\overline{V_0} \subseteq W \cap U_0$ und $\operatorname{diam}(\overline{V_0}) \leq 1$, allgemein $V_j \neq \emptyset$ offen mit $\overline{V_j} \subseteq W \cap V_{j-1}$ und $\operatorname{diam}(\overline{V_j}) \leq 2^{-j}$. Es folgt $\bigcap_{j \geq 0} \overline{V_j} \neq \emptyset$, da X vollständig ist.

Wiederum $\bigcap_{j\geq 0} \overline{V_j} \subseteq W \cap \bigcap_{j \geq 0} U_j$ $\square$

<u>Bsp</u>
- $\mathbb{R}$ ist Bairesch
- jeder kompakte Raum ist Bairesch
- jeder Banachraum ist Bairesch
- $\mathbb{Q}$ ist nicht Bairesch, $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar, $\{q_n\}$ abg. mit leerem Innern in $\mathbb{Q}$.

9. <u>Def</u> Ein Hausdorff-Raum X heißt σ-kompakt, wenn es kompakte Mengen $C_n \subseteq X$ gibt, $n \geq 0$, mit $X = \bigcup_{n \geq 0} C_n$.

<u>Klar</u>: Ist Y Hausdorffsch, X σ-kompakt, $\varphi: X \to Y$ stetig, so ist auch $\varphi(X) \subseteq Y$ σ-kompakt.

Und: σ-kompakte Mengen sind stets Borelmengen!

Jeder kompakte Raum ist σ-kompakt

Aber: $\mathbb{Q}$ ist auch σ-kompakt

Theorem (Satz von der offenen Abbildung) ($\to$ H. Glöckner)

Seien G, H topologische Gruppen, sei $\varphi : G \to H$ surjektiver stetiger Homomorphismus. Wenn G σ-kompakt ist und H Bairesch, dann ist φ offen.

Bew.: Betrachte zuerst den Fall, dass φ bijektiv ist. Dann ist zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $\psi : H \to G$ stetig ist. Sei $C_n \subseteq G$ kompakt, $G = \bigcup_{n \geq 0} C_n$. Setze $A_n = \varphi(C_n) \Rightarrow A_n \subseteq H$ kompakt, also abgeschlossen. Da $H = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ Bairesch ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine offene nichtleere Menge $V \subseteq A_m$. Setze $U = \varphi^{-1}(V)$. Dann ist $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus, da $\varphi : C_m \to A_m$ bijektiv und stetig ist und C_m kompakt. Also ist ψ stetig auf der offenen Menge $V \subseteq H$. Nach § 4.7 ist φ stetig.

Im allgemeinen setze $N = \ker(\varphi)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ bijektiv, stetig

G/N σ-kompakt

$\Rightarrow \bar{\varphi}$ offen $\Rightarrow \varphi$ offen. $\square$

Bsp. Nicht jede lokal kompakt Gruppe ist σ-kompakt. Jede diskrete topologische Gruppe G ist lokal kompakt, aber nur dann σ-kompakt, wenn G abzählbar ist.

Etwa: $(H,+) = (\mathbb{R},+)$ mit diskrete Topologie

$H \xrightarrow{id} \mathbb{R}$ stetig, bijektiv, <u>nicht</u> offen

$\uparrow$ $\quad$ L normale Topologie

nicht σ-kompakt.

10. <u>Satz</u> Jede lokal kompakte Gruppe G hat eine offene σ-kompakte Untergruppe $H \leq G$.

<u>Beweis</u> Sei $C \subseteq G$ kompakt Einsumgebung.

Dann ist $H = \langle C \rangle$ offen, denn $C \subseteq H$ (vgl. §4.2) und $H = D \cup D{\cdot}D \cup D{\cdot}D{\cdot}D \cup D{\cdot}D{\cdot}D{\cdot}D$

$D = C^{-1}{\cdot}C$ kompakt $\square$

<u>Korollar</u> Jede zusammenhängende lokal kompakte Gruppe ist σ-kompakt.

11. Satz Sei X ein total unzush. top. Raum.

(i) Wenn X kompakt ist, dann gilt für jedes $p \in X$, dass $\{p\} = \bigcap \{D \subseteq X \mid p \in D,\ D \text{ offen und abg.}\}$

(ii) Wenn X lokal kompakt ist, U Umgebung von $p \in X$, so gibt es eine offene kompakte Umgebung V von p mit $V \subseteq U$.

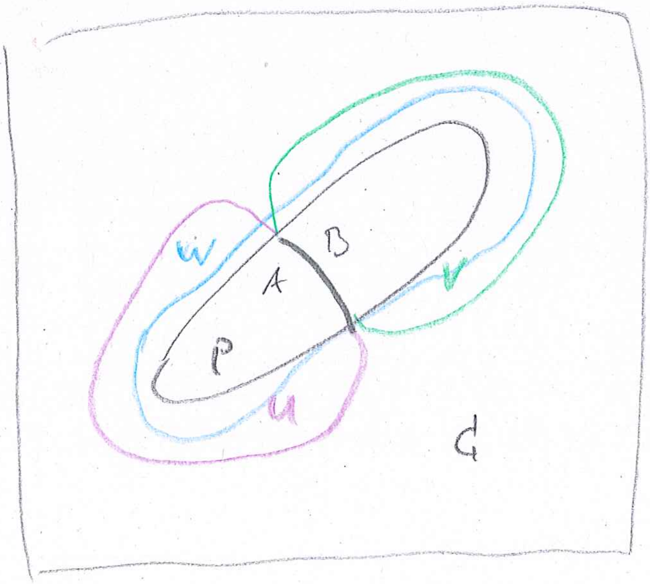
Bew (i) Sei $P = \bigcap \{D \subseteq X \mid p \in D,\ D \text{ offen und abg.}\}$.

Es genügt zu zeigen, dass P zush. ist. Beachte: P ist abg.

Angenommen, $P = A \dot\cup B$ mit $p \in A$, $A, B \subseteq P$ abg.

zz: $B = \emptyset$.

Da X normal ist, gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Sei $G = X - (U \cup V)$. Zu jedem $c \in G$ gibt es W_c offen und abg. mit $p \in W_c$, $c \notin W_c$.



Da G kompakt ist, gibt es $c_1, \dots, c_s \in G$ mit $G \subseteq (X - W_{c_1}) \cup \dots \cup (X - W_{c_s})$

Setze $W = W_{c_1} \cap \dots \cap W_{c_s} \Rightarrow W$ offen und abg.,

$P \subseteq W \subseteq U \cup V$

Nun gilt mit $X_1 = U \cup (X - W)$ off

$X_2 = V \cap W$ off

dann $X_1 \cup X_2 = X$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ $\Rightarrow$ X_1, X_2 abg.

Nun $p \in X_1$ und $B \subseteq X_2$ $\Rightarrow$ $B = \emptyset$ $\square$

(ii) Sei U Umgebung von p. OE U offen und $\bar{U}$ kompakt (sonst wähle kleinere Umgebung).

Sei $T = \bar{U} - U$. Falls $T = \emptyset$ fertig mit $V = U$.

Sonst wähle für jedes $t \in T$ $V_t \subseteq \bar{U}$ abg und offen in $\bar{U}$ (!) mit $p \in V_t$, $t \notin V_t$.

Da T kompakt ist, gibt es $t_1, \dots, t_r$ mit

$T \subseteq (\bar{U} - V_{t_1}) \cup \dots \cup (\bar{U} - V_{t_r})$. Sei $V = V_{t_1} \cap \dots \cap V_{t_r}$

Dann ist V abg. in $\bar{U}$, also kompakt.

Weiter ist V offen in $\bar{U}$ und $V \subseteq U$ (weil $V \cap T = \emptyset$)

$\Rightarrow$ V off in U $\Rightarrow$ V off in X $\square$

12. Theorem (von Dantzig)

Sei G eine lokal kompakte total unzusammenhängende topologische Gruppe. Sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung. Dann existiert eine kompakte offene Untergruppe $K \subseteq G$ mit $K \subseteq U$.

Beweis: Nach §4.11 dürfen wir annehmen, dass U offen und kompakt ist. (Sonst U verkleinern)

Beh: Es gibt eine Einsumgebung $V \subseteq G$ mit $VU \subseteq U$.

Denn: Zu jedem $u \in U$ wähle eine Einsumgebung $W_u \subseteq G$ mit $W_u \cdot W_u \cdot u \subseteq U$. Das geht wegen der Stetigkeit der Abbildung $(x,y) \longmapsto xyu$. Da $W_u u \subseteq U$ Umgebung von u ist, gibt es $u_1, \ldots, u_r \in U$ mit

$$U = W_{u_1} \cdot u_1 \cup \ldots W_{u_r} \cdot u_r . \quad \text{Setze } V = W_{u_1} \cap \ldots \cap W_{u_r} .$$

Es folgt $V W_{u_i} u_i \subseteq U$, also $VU \subseteq U$ $\square$

Nach Verkleinern von V dürfen wir mit §4.11 annehmen, dass V kompakte Einsumgebung ist mit $VU \subseteq U$. Setze $C = V \cap V^{-1} \Rightarrow C$ kompakte Einsumgebung. Sei $K = \langle C \rangle = C \cup C \cdot C \cup C \cdot C \cdot C \cup \ldots$

Wegen $GU \subseteq U$ folgt $KU \subseteq U$, also auch $K \subseteq U$. Da K offen ist (vgl §4.2) und damit abgeschlossen mit $K \subseteq U = \overline{U}$ kompakt, ist K kompakt. □

13. <u>Vorbemerkung</u> Ist G eine topologische Gruppe und ist $H \leq G$ eine offene Untergruppe, so ist G/H diskret, denn für $\pi : G \to G/H$ gilt dann: $\pi^{-1}(gH) = gH$ ist offen $\Rightarrow$ $\{gH\} \subseteq G/H$ offen. Die Umkehrung gilt auch: G/H diskret $\Rightarrow$ H offen. Ist also G kompakt und $H \leq G$ offen, so ist G/H endlich, weil kompakt und diskret, und umgekehrt.

<u>Def</u> Eine kompakte Gruppe G heißt <u>profinit</u> (<u>pro-endlich</u>), wenn es in jeder Einsumgebung $U \subseteq G$ eine offene normale Untergruppe $N \trianglelefteq G$, $N \subseteq U$, gibt.

Solch eine offene normale Untergruppe N ist dann auch kompakt, und G/N ist endlich (daher der Name).

14. <u>Theorem</u> Sei G eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent:

(i) G ist profinit

(ii) Es gibt eine Familie $(E_i)_{i\in I}$ von endlichen Gruppen und einen stetigen injektiven Homomorphismus
$$\varphi : G \to \prod_{i\in I} E_i$$
(Da G kompakt ist, ist dann $\varphi : G \to \varphi(G)$ ein Homöomorphismus)

(iii) G ist total unzusammenhängend.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\mathcal{N}(G) = \{ N \trianglelefteq G \mid N \text{ offen} \}$. Für $N \in \mathcal{N}(G)$ sei $E_N = G/N$, dann ist E_N endlich nach §4.13. Definiere
$$\varphi : G \to \prod_{N\in\mathcal{N}(G)} E_N, \quad g \mapsto (gN)_{N\in\mathcal{N}(G)}$$

Diese Abbildung ist stetig, da für jedes $N \in \mathcal{N}(G)$ die Abbildung
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \prod\limits_{N\in\mathcal{N}(G)} E_N \arrow[d, "\pi_M"] \\ & E_M \end{tikzcd}$$
stetig ist.

Da G profinit ist, gilt $\underset{\overset{\|}{\ker(\varphi)}}{\bigcap \mathcal{N}(G)} = \{1\}$, also ist φ injektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist Beispiel § 4.6, denn Untergruppen von total unzusammenhängenden Gruppen sind wieder total unzusammenhängend.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wenn G kompakt und total unzush. ist, so gibt es nach § 4.12 (van Dantzig) in jeder Einsumgebung $U \subseteq G$ eine kompakte offene Untergruppe $H \subseteq U$. Sei $X = G/H$. Dann ist X endlich und § 4.13 (weil G kompakt), also hat $N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \ker(G \to \mathrm{Sym}(X))$ endlichen Index in G und N ist abgeschlossen. Da G/N kompakt und endlich ist, ist $N \subseteq G$ offen, denn $N = \pi^{-1}(\{N\})$, $\{N\} \subseteq G/N$ $\square$

15. <u>Konstruktion</u> Sei Γ eine residuell endliche Gruppe, sei $\mathcal{N}_F(\Gamma) = \{ N \trianglelefteq \Gamma \mid [\Gamma : N] < \infty \}$.

Betrachte $\varrho : \Gamma \to \prod_{N \in \mathcal{N}_F(\Gamma)} \Gamma/N$, $g \mapsto (gN)_{N \in \mathcal{N}_F(\Gamma)}$

Da Γ residuell endlich ist, ist $\ker(\varrho) = \bigcap \mathcal{N}_F(\Gamma) = \{1\}$, d.h. ϱ ist injektiv. Wir definieren

$\hat{\Gamma} = \overline{\varrho(\Gamma)}$ Abschluss von $\varrho(\Gamma)$ in der profiniten Gruppe $\prod_{N \in \mathcal{N}_F(\Gamma)} \Gamma/N$.

<u>Satz</u> Jede residuell endliche Gruppe ist isomorph zu einer dichten Untergruppe einer profiniten Gruppe. $\square$

Man nennt $\Gamma \xrightarrow{\varrho} \hat{\Gamma}$ die <u>profinite Vervollständigung</u> der residuell endlichen Gruppe Γ.

<u>Theorem</u> (Universelle Eigenschaft der profiniten Vervollständigung) Sei Γ residuell endlich, sei G profinit und sei $\varphi : \Gamma \to G$ ein Homomorphismus.

Dann gibt es genau ein stetiger Homomorphismus $\hat{\varphi} : \hat{\Gamma} \to G$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{\Gamma} \arrow[dl, "\hat{\varphi}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Bew:</u> Angenommen, G ist endlich. Dann ist $M = \ker(\varphi) \in \mathcal{N}_F(\Gamma)$, betrachte das Diagramm

$$\left.\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{\Gamma} \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\hat{\varphi}"] & \prod\limits_{N \in \mathcal{N}_F(\Gamma)} \Gamma/N \arrow[d, "\pi_M"] \\ G \arrow[rr, leftrightarrow] & & \Gamma/M \end{tikzcd}\right\} \Rightarrow \hat{\varphi} \text{ existiert und ist stetig.}$$

Allgemeiner Fall: betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{\Gamma} \arrow[dl, "\hat{\varphi}"'] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \arrow[drr, "\text{stetig}"] & & \\ G \arrow[r, hook, "i"] & \prod\limits_{N \in \mathcal{N}(G)} G/N \arrow[rr, "\pi_M"] & & G/M \end{tikzcd} \qquad M \in \mathcal{N}(G)$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ stetig, nach Konstruktion gilt $\tilde{\varphi}(\hat{\Gamma}) \subseteq i(G)$.

Da $i : G \to i(G)$ Homöomorphismus ist (i ist

stetig und injektiv, G ist kompakt),
ist auch $\hat{\varphi}$ stetig.

Damit ist die Existenz von $\hat{\varphi}$ gezeigt. Da $\hat{\varphi}$ stetig ist und da $\rho(\Gamma) \subseteq \hat{\Gamma}$ dicht ist, ist $\hat{\varphi}$ durch φ eindeutig festgelegt, denn

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{\Gamma} \arrow[dl, "\hat{\varphi}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

stetige Abbildungen sind schon durch ihre Einschränkung auf dichte Mengen festgelegt. □

Zum Abschluss einige Perspektiv- und Ausblicke.

Wir beginnen mit "merkwürdigen Charaktergruppen".

#

16. Čech-Stone und der Raum der Ultrafilter.

Sei I eine unendliche Menge. Eine Teilmenge $\mu \subseteq 2^I$ heißt <u>Filter</u>, wenn gilt:

(F$_1$) $\emptyset \notin \mu$

(F$_2$) $K, L \in \mu \Rightarrow K \cap L \in \mu$

(F$_3$) $K \in \mu$ und $K \subseteq L \subseteq I \Rightarrow L \in \mu$

<u>Bsp</u>
- $\mu_{cf} = \{ J \subseteq I \mid I - J \text{ endlich} \}$ ist Filter, $\bigcap \mu_{cf} = \emptyset$
- $j \in I \rightsquigarrow \mu(j) = \{ J \subseteq I \mid j \in J \}$ ist Filter, $\bigcap \mu(j) = \{j\}$
  Hauptultrafilter

Ein Filter heißt <u>Ultrafilter</u>, wenn für alle $K \subseteq I$ gilt

(UF) $K \in \mu$ oder $I - K \in \mu$.

Ein Filter μ heißt <u>frei</u>, wenn $\bigcap \mu = \emptyset$

<u>Bsp</u>: $\mu(j)$ Ultrafilter, nicht frei
μ_{CF} ist frei, kein Ultrafilter

Erinnerung: βI ist die <u>Čech-Stone Kompaktifizierung</u> des (diskreten) lokal kompakten Raums I. Sie hat folgende Eigenschaften: $I \subseteq \beta I$ ist dicht, βI ist kompakt und für jede (stetige) Abbildung $\varphi : I \longrightarrow Z$ mit Z kompakt gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\beta\varphi : \beta I \longrightarrow Z$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "(\text{stetig})\ \varphi"'] & \beta I \arrow[dl, "\beta\varphi\ \text{stetig; existiert eindeutig}"] \\ Z \ \text{kompakt} & \end{tikzcd}$$

(vgl. GATG §2.19 SoSe 2015)

Für $K \subseteq I$ sei $\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & i \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, mit

Fortsetzung $\beta\chi_K : \beta I \to \{0,1\}$. Dann gilt

$\overline{K} = \{x \in \beta I \mid \beta\chi_K(x) = 1\}$. Denn: "$\subseteq$" ist klar, weil $\beta\chi_K$ stetig ist. Sei $L = I - K \Rightarrow \overline{L} \subseteq \{x \in \beta I \mid \beta\chi_K(x) = 0\}$ also $\overline{K} \cap \overline{L} = \emptyset$. Da $\overline{I} = \overline{K \cup L} = \overline{K} \cup \overline{L}$ gilt, folgt "$\supseteq$".

Beachte auch: $\overline{K}$ ist kompakt und offen in βI.

Für $x \in \beta I$ setzen wir $\mu(x) = \{K \subseteq I \mid x \in \overline{K}\}$

$\Rightarrow \mu(x)$ ist Filter (klar)

$K \subseteq I$ beliebig $\Rightarrow x \in \overline{K}$ oder $x \in \overline{K-I} \Rightarrow \mu(x)$ ist Ultrafilter.

Ist umgekehrt $\mu \subseteq 2^I$ ein Filter, so hat μ die endliche Durchschnitteigenschaft (wegen (F_1) und (F_2)).

Es folgt: $\bigcap\{\overline{K} \mid K \in \mu\} \neq \emptyset$ weil βI kompakt.

Für $x \in \bigcap\{\overline{K} \mid K \in \mu\}$ folgt $\mu(x) \supseteq \mu$.

Falls μ ein Ultrafilter ist, so folgt schon $\mu = \mu(x)$ aus (UF). Ist $x, y \in \beta I$, $x \neq y$, so gibt es $\varphi : \beta I \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 0$ (weil βI normal ist $\to$ Urysohn)

$x \in U = \varphi^{-1}(\tfrac{2}{3}, 1]$ $\quad y \in V = \varphi^{-1}[0, \tfrac{1}{3})$ offen,

dicht $\Rightarrow K = U \cap I$ dicht

$L = V \cap I$

$$\left.\begin{array}{l} I - K \notin \mu(x) \\ I - L \notin \mu(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K \in \mu(x) \\ L \in \mu(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(x) \neq \mu(y)$$

Also gilt $\{\mu(x) \mid x \in \beta I\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ Ultrafilter auf I

$$\updownarrow 1\text{-}1$$

$$\beta I$$

Ist $i \in I$, so ist $\mu(i) = \{ J \subseteq I \mid i \in J \}$. Ist aber $x \in \beta I - I$ und $j \in K \in \mu(x)$ (beliebig), so ist $K - \{j\} \in \mu(x)$, also $\bigcap \mu(x) = \emptyset$. Die Elemente von I entsprechen den Hauptultrafiltern (die sind uninteressant), die Elemente $x \in \beta I - I$ den <u>freien Ultrafiltern</u>.

17. <u>Dichte Normalteiler eines Ultrafilters</u> Sei K eine kompakte topologische Gruppe, I eine unendliche Menge. Dann ist $G = \prod_{i \in I} K$ eine kompakte topologische Gruppe. Beachte: $G = K^I = \{ f : I \to K \text{ Abb} \}$ $= C(I, K) \xleftrightarrow[\text{Čech-Stone}]{\text{bij}} C(\beta I, K)$, denn jedes $f : I \to K$ (I diskret) hat eindeutig stetige Fortsetzung $\beta I \to K$. Sei $x \in \beta I$. Wir definieren

$$G \cong C(\beta I, K) \xrightarrow{x^*} K$$
$$\beta f \longmapsto \beta f(x)$$

Das ist ein surjektiver Homomorphismus (surjektiv: setze $f(i) = a \in K$ für alle $i \in I \Rightarrow \beta f(x) = a$)

Für $x \in I$ ist $x^*(f) = f(x) \Rightarrow x^* = \pi_x : \prod_{i \in I} K \to K$

$\Rightarrow x^*$ stetig + offen.

Satz Wenn $x^* \in \beta I - I$, so ist $\ker(x^*)$ dicht in G und x^* ist nicht stetig.

Beweis Sei $\emptyset \neq V \subseteq G$ offen, wir zeigen $V \cap \ker(x^*) \neq \emptyset$.
Es gibt nach Definition der Produkttopologie auf G $J \subseteq I$ endlich, $\emptyset \neq U_j \subseteq K$ offen mit $\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I-J} K \subseteq V$.
Wähle $f_j \in U_j$ für alle $j \in J$; $f_i = 1$ für $i \in I-J$.
also $f \in V$. Da $x \notin I$ ist $J \notin \mu(x)$, also
$I-J \in \mu(x)$ damit $\beta F(x) = 1 \Rightarrow f \in \ker(x^*)$ $\square$

Korollar Ist E eine endliche Gruppe, I unendliche Menge, so enthält die profinite Gruppe $G = \prod_{i \in I} E$ einen dichten Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $G/N \cong E$.
Insbesondere hat N endlichen Index in G. $\square$

18. Erinnerung: Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathcal{B}(X)$ die σ-Algebra aller Borelmengen in X, d.h. die kleinste σ-Algebra in 2^X, die alle offenen Teilmengen enthält. Ein Maß $\lambda : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ ist eine σ-additive Funktion.

Theorem (A. Haar) Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann gibt es ein Maß $\lambda : \mathcal{B}(G) \to [0,\infty]$ mit

(HM1) $\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) \mid U \supseteq E \text{ offen}\}$ für alle $E \in \mathcal{B}(G)$

(Regularität von λ) $\lambda(U) = \sup\{\lambda(C) \mid C \subseteq U \text{ kompakt}\}$ für alle $U \subseteq G$ offen

(HM2) $\lambda(C) < \infty$ wenn C kompakt

(HM3) $\lambda(E) = \lambda(gE)$ für alle $g \in G$, $E \in \mathcal{B}(G)$

(HM4) $\lambda \neq 0$

Bis auf Skalierung mit einer Konstante ist λ eindeutig bestimmt durch diese vier Eigenschaften.

Beweis: Stroppel, Locally compact groups
Hewitt-Ross, Abstract harmonic analysis

Ist G kompakt, so kann man λ normieren, indem man $\lambda(G) = 1$ setzt.

Man nennt λ das linksinvariante Haar-Maß auf G.

Bsp G endlich diskret $\Rightarrow \lambda(E) = \# E$

$G = (\mathbb{R}^n, +) \Rightarrow \lambda$ Lebesgue-Maß

<u>Theorem (A. Weil)</u> Ist G lokal kompakte Gruppe mit linksinvariantem Haarmaß λ und ist $E \subseteq G$ Borelmenge mit $0 < \lambda(E) < \infty$, so ist EE^{-1} Einsumgebung.

[Hewitt–Ross, Abstract harmonic analysis §20.17]

<u>Folgerung</u> Ist G kompakte Gruppe, $H \leq G$ Untergruppe, H Borelmenge und gilt $\lambda(H) > 0$, so ist H offen.

Die Umkehrung gilt auch: Ist $H \leq G$ offen, G kompakt, so ist $[G:H] = n < \infty$ (weil G/H diskret und kompakt). Wegen $G = g_1 H \cup \ldots \cup g_n H$ folgt $\lambda(G) = n\lambda(H) > 0$

<u>Korollar</u> Ist E endliche Gruppe, I unendliche Menge, $G = \prod_{i \in I} E$ proendlich, $x \in \beta I - I$, dann ist $\ker(x^*) : G \twoheadrightarrow E$ keine Borelmenge. $\square$

Solche Untergruppen (von endlichem Index), die keine Borelmengen sind, nennt man "merkwürdig" (engl. strange subgroups)

—

Eine topologische Gruppe G heißt <u>topologisch endlich erzeugt</u>, wenn es eine endlich erzeugte dichte Untergruppe $\Gamma \leq G$ gibt.

<u>Bsp.</u> • $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ dicht.

• $SL_3(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \subseteq SL_3\mathbb{R}$ dicht

$\uparrow$ endlich erzeugt

Theorem (Serre 1967) Sei G eine topologisch endlich erzeugte pro-p-Gruppe ($G \hookrightarrow \prod_{i \in I} E_i$, E_i endliche p-Gruppen) und sei $H \leq G$ Untergruppe mit endlichem Index. Dann ist H offen.

Theorem (Nikolov–Segal 2003/2013) Sei G eine topologisch endlich erzeugte profinite Gruppe, sei $H \leq G$ Untergruppe von endlichem Index. Dann ist H offen. Wenn $H \trianglelefteq G$ und nur G/H endlich erzeugt ist, so ist H ebenfalls offen.

⌜Der Beweis benutzt viele harte Ergebnisse der endlichen Gruppentheorie, unter anderem CFSG.⌟

19. Def Eine topologische Gruppe G heißt Liegruppe, wenn der topologische Raum eine glatte ($=C^\infty$) Mannigfaltigkeit ist, und wenn die Abbildung

$$q: G \times G \to G, \quad (a,b) \longmapsto a^{-1}b \quad \text{glatt } (=C^\infty) \text{ ist.}$$

Beispiel
- $GL_n \mathbb{R}$ ist Liegruppe
- jede diskrete Gruppe ist Liegruppe
- eine profinite Gruppe ist genau dann eine Liegruppe, wenn sie diskret (also endlich) ist, denn Mannigfaltigkeiten sind lokal zush.

Satz Ist G Liegruppe, $H \leq G$ abg. Untergruppe, so ist H eine Liegruppe und G/H eine glatte Mannigfaltigkeit. Falls $H \trianglelefteq G$, so ist G/H wieder eine Liegruppe.

5. Hilbert-Problem (Hilbert 1900) Wie weit können sich lokal kompakte Gruppen von Liegruppen unterscheiden?

Lösung in den 1950er Jahren durch Iwasawa, Gleason, Yamabe, Montgomery, Zippin.

Theorem (Approximationssatz) Sei G eine lokalkompakte Gruppe, sei $U \subseteq G$ eine beliebige Einsumgebung. Dann existiert eine zush. Liegruppe L, eine kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ mit $K \subseteq U$ (K ist "beliebig klein"), ein offener stetiger Homomorphismus

$$\varphi : L \times K \to G \quad \text{mit } \varphi(1,k) = k$$

für alle $k \in K$

und diskretem Kern.

Insbesondere ist $H = \varphi(L \times K) \subseteq G$ offen und $K \trianglelefteq H$ und H/K ist Liegruppe.

Der Beweis ist kompliziert!

Für total unzusammenhängende Gruppen G haben wir das aber in van Dantzigs Satz §4.12 bewiesen:

Es gibt dann $K \subseteq U$ kompakt und offen. Setze $L = \{1\}$, $\varphi : K \hookrightarrow G$ ist offen.