§ 7 Untergruppen von Freien Gruppen

1. **Def** Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt *lokal injektiv*, wenn jeder Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ hat, so dass $\varphi : U \to Y$ injektiv ist.

Bsp (a) injektive Abbildungen
(b) Überlagerungen

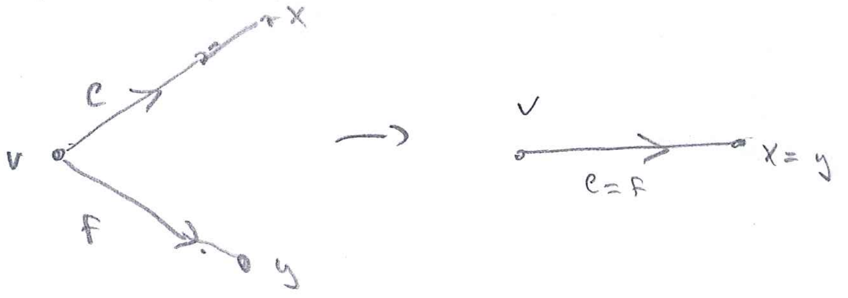
Satz Sei $\varphi : \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus von Graphen, sei $v \in \Gamma'$ Ecke. Wenn $\varphi : |\Gamma'| \to |\Gamma|$ lokal injektiv ist, so ist

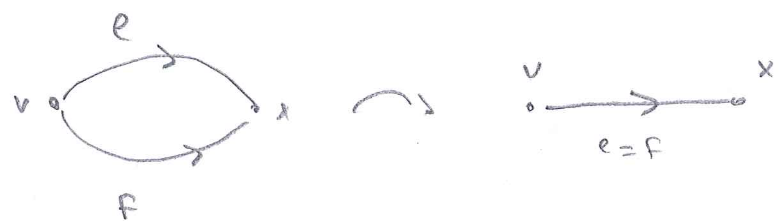
$$\varphi_\# : \pi_1(|\Gamma'|, v) \to \pi_1(|\Gamma|, \varphi(v))$$

injektiv.

Bew: Ein Kantenweg $\gamma : [0,1] \to |\Gamma'|$ ist genau dann (lokal) injektiv, wenn er reduziert ist. Also bildet $\varphi_\#$ reduzierte Kantenwege auf reduzierte Kantenwege ab. Nach § 6.12 ist ein nicht-konstanter reduzierter Kantenweg nicht homotop rel ∂ zu einem konstanten Weg. $\square$

2. Def Sei Γ ein Graph, sei e, f Kanten mit $e_0 = v = f_0$ mit $e \neq \bar{f}$. Der Graph $\Gamma/_{e=f}$ ist der Graph, der durch "Verkleben" von e und f entsteht





Wir erhalten einen Morphismus $\Gamma \xrightarrow{\varphi} \Gamma/_{e=f}$

Beobachtung

(i) Jeder Kantenweg in $\Gamma/_{e=f}$, der in $v=e_0$ startet und endet, hat ein Urbild in Γ. Also ist die Abbildung

$$\varphi_\#: \pi_1(|\Gamma|,p) \to \pi_1(|\Gamma/_{e=f}|,\varphi(p))$$

surjektiv (zuerst für $p=v$, damit aber für jede Ecke p in Γ)

(ii) Ist $\Gamma' \xrightarrow{\varphi} \Gamma$ ein Morphismus von Graphen, der <u>nicht</u> lokal injektiv ist, so gibt es Kanten e,f in Γ' mit $e_0=f_0$, $\varphi(e)=\varphi(f)$, und folglich faktorisiert φ durch

$$\begin{tikzcd}
\Gamma' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \Gamma \\
& \Gamma'/_{e=f} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

3. **Lemma** Sind Γ' und Γ Graphen, Γ' endlich, und ist $\varphi: \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus, so faktorisiert φ als

$$\Gamma' = \Gamma_0 \to \Gamma_1 \to \Gamma_2 \cdots \to \Gamma_m \xrightarrow{\psi} \Gamma$$

$\Gamma_{j+1} \cong \Gamma_j/_{e=f}$ für gewisse Kanten e,f in Γ_j

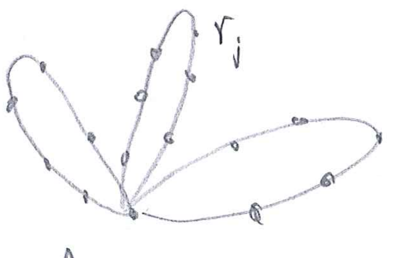
und $\Gamma_m \xrightarrow{\psi} \Gamma$ lokal injektiv. $\square$

4. <u>Satz / Algorithmus</u> Sei Γ ein zush. Graph, $p \in \Gamma$ Ecke, seien $r_1, \dots, r_n \in \Omega(|\Gamma|, p)$ reduzierte Kantenwege, sei H die von $[r_1], \dots, [r_n]$ erzeugte Untergruppe von $\pi_1(|\Gamma|, p)$.

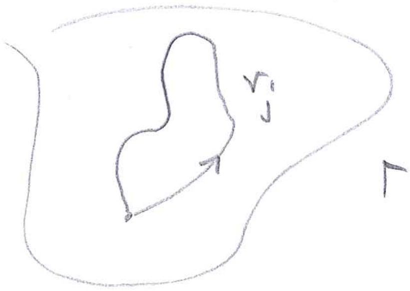
Dann existiert ein endlicher (zush.) Graph Δ und ein lokal injektiver Morphismus $\varphi: \Delta \to \Gamma$, eine Ecke $z \in \Delta$ mit $\varphi(z) = v$ und

$$H = \varphi_{\#} \pi_1(|\Delta|, z)$$

<u>Beweis</u> Sei Δ_0 der Graph, der aus n Kreisen besteht, die alle in einer Ecke v zusammenhängen, so, dass der j-te Kreis aus so vielen Kanten besteht wie r_j.



Δ_0



Wir erhalten einen Morphismus $\varphi: \Delta_0 \to \Gamma$, der den j-ten Kreis auf r_j abbildet. Wende Lemma 7.3 an,

$$\begin{array}{c} \Delta_0 \to \dots \to \Delta_m \xrightarrow{\varphi} \Gamma \\ \| \phantom{\xrightarrow{\varphi} \Gamma} \\ \Delta \phantom{\xrightarrow{\varphi} \Gamma} \end{array}$$

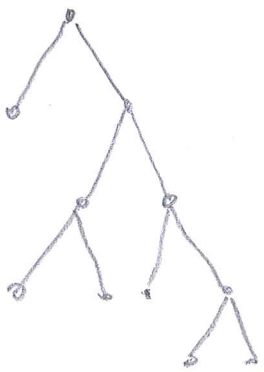
$\square$

Bem. Nach Wahl ein Spannbaums in Δ erhält man so ein Basis für die freie Gruppe H.

<u>Korollar</u> Ist $H \leq F(X)$ endlich erzeugt, so gibt es ein endliche Teilmenge $Y \subseteq H$, die Basis der freien Gruppe H ist. □

5. <u>Lemma</u> Ist Δ ein endlicher Baum mit l Ecken, dann gilt $\# E^+ = l - 1$

<u>Beweis</u>



Kante	Ecke
1	
	n_1
n_1	
	n_2
n_2	
	n_3
n_3	
	n_r
n_r	

□

<u>Korollar</u> Ist Γ endlicher zush. Graph mit l Ecken, und $\# E^+ = m$

$$\pi_1(|\Gamma|, p) \cong F_{m-l+1}$$ □

6. **Satz** Ist $H \leq F_m$ Untergruppe mit $[F_m : H] = n$, so gilt $H \cong F_h$,

$$h = n(m-1)+1$$

Beweis Sei $X \subseteq F_m$ Basis, Γ der Cayleygraph $\Gamma = \Gamma(F_m, X)$, sei $\Delta = {}_H\backslash\Gamma$. Es folgt $\pi_1(|{}_H\backslash\Gamma|, p) \cong H$, vgl §6.17, §6.18.

Wir zählen die Ecken und Kanten in Δ.

Ecken: H-Bahn in G = Rechtsnebenklassen in ${}_H\backslash G$ $\Rightarrow$ n Ecken.

Kanten: $g(a, ax) = (ga, gax) = (b, by)$ (für $x, y \in X$, $a, b \in F_m$, $g \in H$)

$$\Leftrightarrow \quad ga = b, \quad x = y$$

also $n \cdot m$ Kanten in E^+

$\Rightarrow$ $h = m \cdot n - n + 1 = n(m-1)+1$ $\square$

Korollar Ist G endlich erzeugt mit m Erzeugern, $K \leq G$ eine Untergruppe mit

$$[G : K] = n$$

so lässt sich K mit $n(m-1)+1$ Elementen erzeugen.

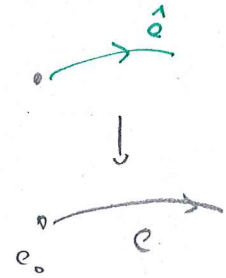
Das verallgemeinert Theorem §1.11 erheblich!

<u>Beweis</u> Da G von m Elementen erzeugt wird, erhalten wir ein Epimorphismus $F_m \xrightarrow{\varphi} G$. Setze $H = \varphi^{-1}(K)$, es folgt $[F_m : H] = [G : H]$ (warum?) $\square$

7. <u>Lemma</u> Sei $\varphi : \Gamma' \to \Gamma$ ein lokal injektiver Morphismus von Graphen, sei Γ zush. und $\Gamma' \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) $\varphi : |\Gamma'| \to |\Gamma|$ ist Überlagerung

(ii) Ist e Kante in Γ und v Ecke in Γ' mit $\varphi(v) = e_0$, so gibt es eine Kante $\hat{e}$ in Γ' mit $\hat{e}_0 = v$ und $\varphi(\hat{e}) = e$



(i) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei v Ecke in Γ', sei q Ecke in Γ. Dann gibt es einen Kantenweg γ in Γ von $\varphi(v)$ nach q. Bed (ii) garantiert die Existenz eines Lifts von γ, also existiert eine Ecke u in Γ' mit $\varphi(u) = q$. Also gilt für alle Ecken q in Γ, dass $\varphi^{-1}(q) \neq \emptyset$. Daraus wiederum folgt $\varphi^{-1}(e) \neq \emptyset$ für jede Kante in Γ (wegen Bedingung (ii)).

Ist nun $x \in |\Gamma|$, $x = e_s$ mit $0 < s < 1$, so ist $U = \{e_t \mid 0 < t < 1\} \subseteq |\Gamma|$ offen mit (*)

Ist $x \in |\Gamma|$ Ecke, so setze $U_x = \{e_t \mid e_0 = x, 0 \le t < \frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(U_x) = \dot{\bigcup}_{y \in \varphi^{-1}(x)} U_y$ hat (*) wegen Bed. (ii). $\square$

8. Theorem Sei $N \trianglelefteq F_m$ mit $N \neq \{1\}$.

Dann sind äquivalent:

(i) $[F_m : N] < \infty$

(ii) N ist endlich erzeugt.

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii) mit §1.11 oder §7.6.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei R Rose mit m Blättern und einer Ecke p. Wir identifizieren $\pi_1(|R|, p) \cong F_m$ mit F_m. Also ist $N \le F_m$ endlich erzeugt. Nach §7.4 gibt es einen zusammenh. endlichen Graphen sowie einen lokal injektiven Morphismus $\varphi : \Gamma \to R$ mit $\varphi_\# \pi_1(|\Gamma|, v) = N$, für eine Ecke $v \in \Gamma$.

Beh: φ ist Überlagerung.

Wenn wir die Beh. bewiesen, so folgt mit §5.12, dass $[F_m : N] = \# \varphi^{-1}(p)$.

Da Γ endlich ist, ist diese Zahl endlich.

Beweis der Behauptung mit §7.7. in zwei Schritten.

1.) Für jede Ecke u in Γ gilt

$\varphi_\# \pi_1(|\Gamma|, u) = N$

Denn: Angenommen, $N = \varphi_\# \pi_1(|\Gamma|, v)$. Sei $\alpha \in \Omega(|\Gamma|, u, v)$.

Dann ist $\varphi_\# [\alpha] \in \pi_1(|R|, p)$, weil $\varphi(u) = p = \varphi(v)$

(eine Rose hat nur eine Ecke!); Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(|\Gamma|, v) \arrow[r, "\varphi_\#"] \arrow[d, "c_{[\alpha]}"', "\cong"] & N \arrow[d, "c_{[\varphi\alpha]}"] \\
\pi_1(|\Gamma|, u) \arrow[r, "\varphi_\#"] & {[\varphi\alpha] N [\overline{\varphi\alpha}] = N}
\end{tikzcd}$$

(vgl. §3.3)

2.) Sei v Ecke in Γ, sei γ ein reduzierter Kantenweg in R mit $[\gamma] \neq [\varepsilon_p]$, $[\gamma] \in N$.

Sei a die erste Kante im Kantenweg γ.

Sei $\hat{\gamma}$ ein reduzierter Kantenweg in $\Omega(|\Gamma|, v)$ mit $\varphi_\#[\hat{\gamma}] = [\gamma]$. Wegen der Eindeutigkeit von red. Kantenweg und weil $\varphi \circ \hat{\gamma}$ red. ist (vgl §7.1) folgt $\varphi \circ \hat{\gamma} = \gamma$. Insbesondere gilt für die erste Kante $\hat{a}$ in $\hat{\gamma}$, dass $\varphi(\hat{a}) = a$.

Ist b Kante mit $\bar{b} \neq a$, so ist

$[\delta] = [\gamma_b] * [\gamma] * [\gamma_{\bar{b}}]$ ein Kantenweg, der reduziert ist, wenn die letzte Kante in γ nicht b ist.

In jedem Fall fängt der zugehörige reduzierte Kantenweg zu δ mit der Kante b an, und $[\delta] \in N$

Folglich (gleiches Argument wie eben) gibt es eine Kante $\hat{b}$ in Γ mit $\hat{b}_0 = v$ und $\varphi(\hat{b}) = b$. Mit §7.7 folgt: φ ist eine Überlagerung. □

<u>Korollar A</u> Für $m \geq 2$ ist die Kommutatorgruppe $DF_m \trianglelefteq F_m$ nicht endlich erzeugt.

<u>Beweis</u> Es gilt $F_m / DF_m \cong \mathbb{Z}^m$, vgl §2.12, also hat DF_m unendlich Index in F_m. Da F_m für $m \geq 2$ nicht abelsch ist, gilt $DF_m \neq \{1\}$. □

<u>Korollar B</u> Ist $n \geq m \geq 2$, so gibt es einen Monomorphismus $F_n \longrightarrow F_m$. Insbesondere gibt es für <u>jedes</u> $n \geq 2$ einen Monomorphismus $F_n \longrightarrow F_2$.

<u>Beweis</u> Da DF_m frei und nicht endlich erzeugt ist, gilt $DF_m \cong F(X)$ für eine abzählbar unendliche Menge $X \subseteq F_m$ □

9. Def + Lemma

Sei $\Gamma_1=(V_1,E_1)$, $\Gamma_2=(V_2,E_2)$, $\Gamma=(V,E)$ Graph und $\xi_i:\Gamma_i\to\Gamma$ Morphism. Wir definieren einen Graph $\Gamma^*=(V^*,E^*)$ sowie Morphism $\varphi_i:\Gamma^*\to\Gamma_i$ wie folgt.

$$V^*=\{(v_1,v_2)\in V_1\times V_2 \mid \xi_1 v_1=\xi_2 v_2\}$$

$$E^*=\{(e_1,e_2)\in E_1\times E_2 \mid \xi_1 e_1=\xi_2 e_2\}$$

$\varphi_i(v_1,v_2)=v_i \qquad \varphi_i(e_1,e_2)=e_i$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^* \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\xi_1"] \\
\Gamma \arrow[r, "\xi_2"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Man nennt Γ^* den Pull back des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma_1 \arrow[d, "\xi_1"] \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\xi_2"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Lemma Seien $\Gamma_i \xrightarrow{\xi_i} \Gamma$ lokal injektive Morphism von Graphen für $i=1,2$. Seien p_i Ecken in Γ_i mit $\xi_1(p_1)=p=\xi_2(p_2)$. Sei Γ^* wie oben definiert. Dann sind auch φ_1,φ_2 lokal injektiv, und es gilt

$$(\xi_1\circ\varphi_1)_\#\,\pi_1(|\Gamma^*|,(p_1,p_2)) \overset{(*)}{=} (\xi_1)_\#\,\pi_1(|\Gamma_1|,p_1)$$
$$\cap\,(\xi_2)_\#\,\pi_1(|\Gamma_2|,p_2)$$

$$= (\xi_2 \circ \varphi_2)_\# \, \pi_1(|\Gamma^*|, (p_1,p_2)) .$$

Beweis: Wegen $\xi_1\varphi_1 = \xi_2\varphi_2$ ist "$\subseteq$" klar bei (*).

Sei $[\gamma] \in \xi_{1\#}\pi_1(|\Gamma_1|, p_1) \cap \xi_{2\#}\pi_1(|\Gamma_2|, p_2)$.

Dann gibt es eindeutige reduzierte Kantenwege γ_i in Γ_i mit

$\xi_{i\#}[\gamma_i] = [\gamma]$ und $\xi_1\gamma_1 = \xi_2\gamma_2$, weil reduzierte Kantenwege eindeutig sind und weil ξ_1, ξ_2 lokal injektiv sind, vgl. §7.1. Also ist $\gamma^*: t \mapsto (\xi_1(t), \xi_2(t))$ ein reduzierter Kantenweg in Γ^*, mit $\xi_1\varphi_1[\gamma^*] = [\gamma]$.

Es folgt "$\supseteq$" bei (*).

φ_1 ist lokal injektiv: angenommen, $\varphi_1(a_1,a_2) = \varphi_1(b_1,b_2)$ mit $(a_1)_0 = (b_1)_0$, $(a_2)_0 = (b_2)_0$

$\Rightarrow a_1 = b_1$. Weiter $\xi_2(a_2) = \xi_1(a_1) = \xi_1(b_1) = \xi_2(b_2)$

ξ_2 lok. inj $\Rightarrow$ $a_2 = b_2$ □

10. Korollar (Satz von Howson)

Sind $K_1, K_2 \subseteq F_m$ endlich erzeugte Untergruppen, so ist auch $K_1 \cap K_2$ endlich erzeugt.

Beweis Konstruiere Δ_1, Δ_2 mit lokal injektiven Morphismen $\xi_i : \Delta_i \to R$, R Rose mit m Blättern wie in § 7.4. Sei Δ^* der Pullback von

$$\begin{array}{ccc} \Delta^* & \longrightarrow & \Delta_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 & \longrightarrow & \Gamma \end{array}$$

Nach Konstruktion in § 7.4 sind Δ_1 und Δ_2 endlich, also auch Δ^*. Folglich ist $\pi_1(|\Delta^*|, v) \cong K_1 \cap K_2$ endlich erzeugt. $\square$

11. Bem Howsons Satz gilt nicht für endl. erzeugte Untergruppen in nicht-freien Gruppen. Ein Beispiel.

$$A = F(\{a_1, a_2\}) \cong D = F(\{b_1, b_2\})$$

$$a_1 \neq a_2 \qquad b_1 \neq b_2$$

$$a_i \neq b_j$$

$DA \cong DB$ Kommutatorgruppen.

Set $G = A \underset{C}{*} B$ $\qquad C = DA$

Wir erhalten Untergruppen K_1 via $A \hookrightarrow A \underset{C}{*} B$

K_2 via $B \hookrightarrow A \underset{C}{*} B$

vgl. § 4.4. , $K_1 \cong A \cong F_2 \cong K_2$

$K_1 \cap K_2 \cong DA \cong DF_2$ nicht endlich

erzeugt nach § 7.8. #

12. Konstruktion Sei Γ zush. Graph mit endlicher Eckenmenge, sei R ein Rose, sei $\varphi : \Gamma \to R$ lokal injektiver Morphismus. Dann existiert ein Graph $\Gamma' \supseteq \Gamma$ mit der gleichen Eckenmenge wie Γ', ein Morphismus $\varphi' : \Gamma' \to R$, der φ fortsetzt, so dass φ' eine Überlagerung ist.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma' \arrow[d, "\varphi'"] \\ \Gamma \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"] & R \end{tikzcd}$$

Bew. Sei V Eckenmenge von Γ und sei E^+ Orientierung von R. Für jede Kante $e \in E^+$ sei

$S_e = \{ (u,v) \in V \times V \mid$ es gibt Kante f in Γ mit $\varphi(f) = e,\ \varphi(f_0) = u,\ \varphi(f_1) = v \}$

Da φ lokal injektiv ist, gibt es zu jedem $u \in V$ höchstens ein $v \in V$ mit $(u,v) \in S_e$ und umgekehrt. Folglich existiert eine injektive Abbildung $\sigma_e : V \to V$, deren Graph S_e enthält. Da V endlich ist, ist σ_e bijektiv.

Sei $F^+ = \{ (u,v,e) \in V \times V \times E^+ \mid \sigma_e(u) = v \}$

$$(u,v,e)_0 = u \qquad (u,v,e)_1 = v \qquad \overline{(u,v,e)} = (v,u,\bar{e})$$

$\rightsquigarrow$ Graph $\Gamma' = (V,F)$ sowie

$$\iota : \Gamma \to \Gamma' \qquad v \longmapsto v$$
$$f \longmapsto (f_0, f_1, \varphi(f)) \quad \text{wenn } \varphi(f) \in E^+$$
$$f \longmapsto (f_1, f_0, \varphi(\bar{f})) \quad \text{wenn } \varphi(\bar{f}) \in E^+$$

$\varphi' : \Gamma' \to R \qquad v \longmapsto p \leftarrow$ Ecke der Rose

$$(u,v,e) \mapsto e$$

Mit §7.7: φ' ist Überlagerung. $\square$

13. <u>Def</u> Sei G eine Gruppe, $K \leq G$ eine Untergruppe. Wir nennen K einen <u>freien Faktor</u> in G, wenn es eine Untergruppe $L \leq G$ gibt, so dass der kanonische Homomorphismus

$$K * L \xrightarrow{\varphi} G \qquad \varphi(g) = g \text{ für alle } g \in K \cup L$$

ein Isomorphismus ist.

<u>Bsp</u> • $\{1\}, G \leq G$ sind stets freie Faktoren

• $Y \subseteq X \rightsquigarrow F(Y) \leq F(X)$ freier Faktor, denn
$$F(X) \cong F(Y) * F(X \setminus Y).$$

14. Theorem (M. Hall) Sei $K \le F_m$ endlich erzeugt. Dann gibt es $G \le F_m$ mit $[F_m : G] < \infty$ und $K \le G$ so, dass K in G ein freier Faktor ist, $G \cong K * L$.

Bew: Sei R Rose mit m Blättern, sei Γ endl. zush. Graph mit lokal injektivem Morphismus $\varphi : \Gamma \to R$ so, dass $\varphi_\# \pi_1(|\Gamma|, v) = K \le \pi_1(|R|, p) = F_m$. Konstruiere Überlagerung wie in § 7.12

$$\begin{tikzcd} & \Gamma' \arrow[d, "\varphi'"] \\ \Gamma \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"'] & R \end{tikzcd}$$

Dann hat $\varphi'_\# \pi_1(|\Gamma'|, v) = G \ge K$ endlichen Index in $F_m = \pi_1(|R|, p)$, weil $(\varphi')^{-1}(p)$ endlich ist, vgl. § 5.12.

Sei E^+ Orientierung von Γ', sei $\Delta \subseteq \Gamma$ Spannbaum.

Sei $X = \{ e \in E^+ \mid e \text{ in } \Gamma, e \text{ nicht in } \Delta \}$

$Y = \{ e \in E^+ \mid e \text{ nicht in } \Gamma \}$

$\Rightarrow \quad K \cong F(X) \qquad G \cong F(X \sqcup Y) \cong F(X) * F(Y)$

setze $L = F(Y)$. $\square$

15. <u>Korollar</u> F_m ist residuell endlich.

<u>Beweis</u> Sei $g \in F_m - \{1\}$. Es folgt $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$ (z.B. nach Satz von Schreier) und $g \notin \langle g^2 \rangle$. Wähle $G \leq F_m$ so, dass $\langle g^2 \rangle = K \leq G$ freier Faktor ist, $G = \langle g^2 \rangle * \underset{\uparrow \text{frei}}{L}$. Es folgt $g \notin G$, denn es gibt einen Homomorphismus $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$ mit $\varphi(g^2) = 1$.

Sei $N \trianglelefteq F_m$ mit $[F_m : N] < \infty$ und $G \supseteq N$, vgl. §1.9. Es folgt $g \notin N$. $\square$