§5. Fundamentalgruppen

Wir erinnern zuerst an die Konstruktion der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes.

1. Sei X ein topologischer Raum (z.B. ein metrischer Raum), seien $p, q \in X$. Wir setzen

$$\Omega(X, p, q) = \{ c : [0,1] \to X \mid c \text{ stetig}, \ c(0) = p, \ c(1) = q \}$$

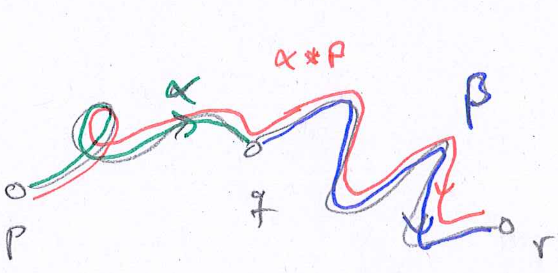
Menge der <u>Wege von p nach q</u>. Für $p = q$ setzt

$\Omega(X, p) = \Omega(X, p, p)$ Schleifenraum von X mit Grundpunkt p. Wir nennen X <u>wegzusammenhängend</u>, wenn gilt $X \neq \emptyset$ und $\Omega(X, p, q) \neq \emptyset$ für alle $p, q \in X$.

Für $p, q, r \in X$ definieren wir eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \Omega(X, p, q) \times \Omega(X, q, r) &\longrightarrow \Omega(X, p, r) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

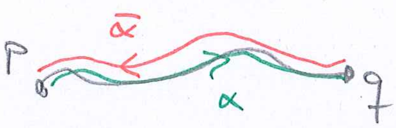
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$



Sowie eine Abbildung $\Omega(X, p, q) \longrightarrow \Omega(X, q, p)$

$$\alpha \longmapsto \bar{\alpha}$$

$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$



Weiter sei ε_p der $\underbrace{\text{Weg}}_{\text{(konstante)}}$ $\varepsilon_p(t) = p$ für alle $t \in [0,1]$

2. Seien X, Y zwei topologische Räume und $\alpha, \beta : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen. Wir nennen α, β <u>homotop</u>, $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung $\varphi : X \times [0,1] \to Y$

$$\varphi : (x, s) \longmapsto \varphi_s(x)$$

gibt mit $\alpha = \varphi_0$, $\beta = \varphi_1$. (*) Man rechnet leicht nach: Homotopie ist eine Äquivalenzrelation:

$$\alpha \simeq \alpha \qquad \alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$$

$$\alpha \simeq \beta \simeq \gamma \Rightarrow \alpha \simeq \gamma .$$

Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge und gilt $\alpha(a) = \beta(a)$ für alle $a \in A$, so heißen α und β <u>homotop</u> relativ zu A, $\alpha \simeq \beta$ rel A, wenn die Homotopie φ so gewählt werden kann, dass für alle $t \in [0,1]$, $a \in A$ gilt

$$\alpha(a) = \varphi_t(a) = \beta(a)$$

Auch das ist eine Äquivalenzrelation (und $\alpha \simeq \beta$ ist das gleiche wie $\alpha \simeq \beta$ rel $\emptyset$)

(*) Man nennt φ dann <u>Homotopie</u> zwischen α und β.

#

3. Für $[0,1]$ schreiben wir kurz $\partial = \{0,1\} \subseteq [0,1]$.

Für $\alpha \in \Omega(X,p,q)$ sei $[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X,p,q) \mid \alpha \simeq \beta \text{ rel } \partial\}$

Dann gilt Folgendes für alle Wege

(1) $$\left.\begin{array}{l} \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \partial \\ \beta \simeq \beta' \text{ rel } \partial \\ \alpha(1) = \beta(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta' \text{ rel } \partial$$

Wir erhalten also eine wohldefinierte Verknüpfung

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

(2) $[\alpha * \varepsilon_q] = [\alpha] = [\varepsilon_p * \alpha]$ $\quad \alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$

(3) $[\alpha * \bar{\alpha}] = [\varepsilon_p]$ $\quad [\bar{\alpha} * \alpha] = [\varepsilon_q]$

(4) $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$ rel ∂, also

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$$

Wir setzen $\pi_1(X, p, q) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X,p,q)\}$

Es folgt: $\pi_1(X,p) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X,p)\}$

<u>Satz</u> $(\pi_1(X,p), *)$ ist eine Gruppe, die

<u>Fundamentalgruppe</u> von X (bezüglich des Grundpunkts p)

<u>Beweis</u> Klar nach (1), (2), (3), (4). $\square$

<u>Satz</u> Ist $\gamma \in \Omega(X, q, p)$, so ist die Abbildung

$$c_{[\gamma]} : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma] * [\alpha] * [\bar{\gamma}]$$

ein Isomorphismus von Gruppen. Ist also X wegzush., so gilt für alle $p, q \in X$:

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X,q)$$ □

[Achtung: der Isomorphismus $c_{[\gamma]}$ hängt vom gewählten Weg $[\gamma]$ ab!]

<u>Beweis</u> von ①, ②, ③, ④

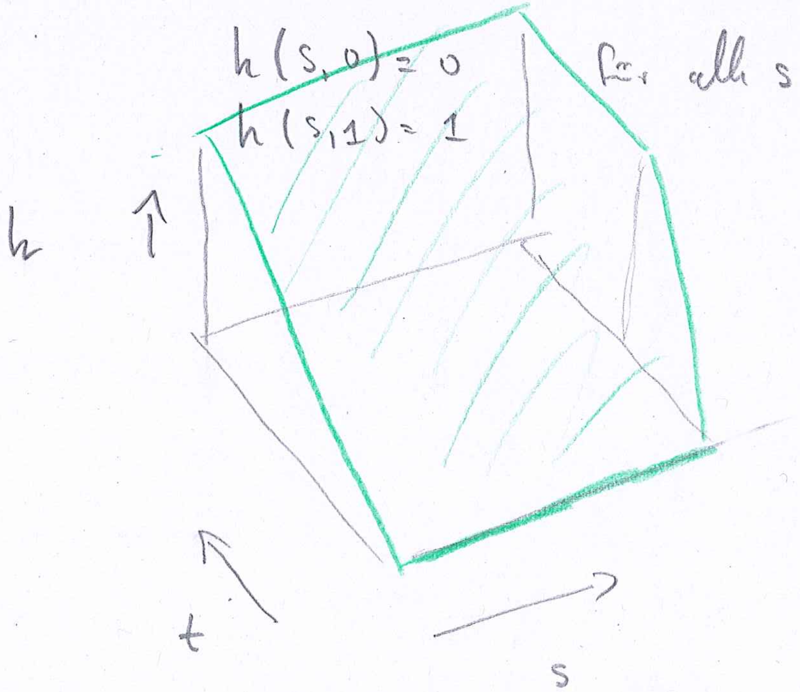
z.B. ② Wähle eine stetige Funktion $h : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $(s,t) \mapsto h(s,t)$

mit $h(0,t) = t$ für alle t

$$h(1,t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$h(s,0) = 0$ für alle $s \in [0,1]$

$h(s,1) = 1$



$$\varphi_s(t) = \alpha(h(s,t))$$

$$\varphi_0(t) = \alpha(t)$$

$$\varphi_1(t) = (\alpha * \varepsilon_q)(t)$$

$$\varphi_s(0) = p$$

$$\varphi_s(1) = q$$

Ähnlich Argument für die anderen Punkte. □

4. Ist $\varphi : X \to Y$ stetig und $\alpha \in \Omega(X, p, q)$, so ist $\varphi \circ \alpha \in \Omega(Y, \varphi(p), \varphi(q))$. Weiter gilt offensichtlich:

$\alpha \simeq \beta$ rel ∂ $\Rightarrow$ $\varphi \circ \alpha \simeq \varphi \circ \beta$ rel ∂, wie (Einsehen genügt)

sowie $\varphi \circ (\alpha * \beta) = (\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)$ (Einsehen genügt)

<u>Satz</u> Ist $\varphi : X \to Y$ stetig, $p \in X$, so ist

$$\varphi_{\#} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, \varphi(p))$$
$$[\alpha] \longmapsto \varphi_{\#}[\alpha] = [\varphi \circ \alpha]$$

ein Homomorphismus. $\square$

Klar: Es gilt $(\psi \circ \varphi)_{\#} = \psi_{\#} \circ \varphi_{\#}$ für

$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ stetig.

<u>Satz</u> Sind $\varphi, \psi : X \rightrightarrows Y$ homotop rel p (für ein $p \in X$), so gilt $\varphi_{\#} = \psi_{\#} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, \varphi(p))$

<u>Beweis</u> Ist ξ eine Homotopie zwischen φ und ψ rel p, so gilt für $\alpha \in \Omega(X, p)$, dass $\varphi \circ \alpha \simeq \psi \circ \alpha$ rel ∂

via $(s, t) \longmapsto \xi_s(\alpha(t))$ $\square$

→ Einschub

Wir definieren

$$\varphi_\#[\alpha] = [\varphi\circ\alpha]$$ für $\varphi: X \to Y$ stetig, $\alpha \in \Omega(X,p,q)$

Dann gilt für $\beta \in \Omega(X,q,r)$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\#[\alpha * \beta] & = & \varphi_\#([\alpha]*[\beta]) \\ \| & & \\ [\varphi\circ\alpha * \varphi\circ\beta] & = & (\varphi_\#[\alpha]) * (\varphi_\#[\beta]) \end{array}$$

[$\varphi_\#$ ist damit ein Homomorphismus der Fundamental-Gruppoide]

5. **Satz** Seien X, Y topologische Räume, sei $p \in X$ und $q \in Y$. Seien

$$pr_X : X \times Y \to X \qquad (x,y) \mapsto x$$
$$pr_Y : X \times Y \to Y \qquad (x,y) \mapsto y$$

die kanonischen Projektionen. Dann ist die Abbildung

$$\pi_1(X\times Y, (p,q)) \longmapsto \pi_1(X,p) \times \pi_2(Y,q)$$
$$[\alpha] \longmapsto \left((pr_X)_\# [\alpha], (pr_Y)_\# [\alpha]\right)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis Die Abbildung $\Omega(X\times Y, (p,q)) \to \Omega(X,p) \times \Omega(Y,q)$
$\alpha \longmapsto (pr_X \circ \alpha, pr_Y \circ \alpha)$
ist eine Bijektion. Weiter ist die oben angegebene Abbildung ein Homomorphismus von Gruppen, die folglich surjektiv ist. Angenommen, $[\alpha] \in \pi_1(X\times Y, (p,q))$ liegt im Kern, also $(pr_X)_\# [\alpha] = [\varepsilon_p]$, $(pr_Y)_\# [\alpha] = [\varepsilon_q]$.
Schreibe $\alpha(t) = (\beta(t), \gamma(t)) = (pr_X \alpha(t), pr_Y \alpha(t))$. Es gibt also Homotopien φ, ψ rel ∂ mit
$\varphi_0 = \beta$, $\psi_0 = \gamma$ Definiere $(s,t) \mapsto (\varphi_s(t), \psi_s(t))$,
$\varphi_1 = \varepsilon_p$, $\psi_1 = \varepsilon_q$ das ist eine Homotopie rel ∂
zwischen α und $\varepsilon_{(p,q)}$ $\rightsquigarrow$ $[\alpha] = [\varepsilon_{(p,q)}]$ $\square$

6. Ist $X = \{p\}$ ein Raum, der nur aus einem Punkt besteht, so gilt $\Omega(X,p) = \{\varepsilon_p\}$, folglich $\pi_1(X,p) = \{[\varepsilon_p]\}$.
Für andere topologische Räume ist es fast nie möglich, die Fundamentalgruppe direkt aus der Definition zu berechnen, man braucht Hilfsmittel.

<u>Def</u> Ein topologischer Raum X heißt <u>kontrahierbar</u>, wenn die Identität id_X homotop zu einer konstanten Abbildung $X \to X$ ist. Mit anderen Worten: es gibt dann $\varphi : X \times [0,1] \to X$ (stetig) mit $\varphi_0 = id_X$ und $\varphi_1(x) = p = \text{const}$ für ein $p \in X$.

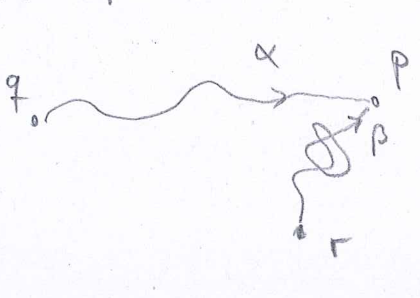
In der Vorlesung im letzten Semester haben wir bewiesen

<u>Satz</u> Sei X kontrahierbar. Dann ist X wegzusammenhängend und für jeden Punkt $q \in X$ gilt

$$\pi_1(X,q) = \{[\varepsilon_q]\}$$

<u>Beweis</u> ① X ist wegzusammenhängend.

Sei $\varphi : X \times [0,1] \to X$ stetig, $\varphi_0 = id_X$, $\varphi_1(x) = p$ für alle $x \in X$. Dann ist $\alpha(t) = \varphi_t(q)$ ein Weg von q nach p. Jeder Punkt $q \in X$ lässt sich also durch einen Weg mit p verbinden. Damit gibt es auch immer Wege zwischen beliebigen Punkten.



$\alpha * \bar\beta$ ist Weg von q nach r.

Den allgemeinen Fall haben wir in den "Grundlagen der Analysis, Geometrie und Topologie" in § 3.7 bewiesen. □

Wir beweisen jetzt ein stärkeres Ergebnis, das diesen Satz impliziert.

7. <u>Def</u> Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt <u>Homotopieäquivalenz</u>, wenn es eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$ gibt mit (*)

$$\psi \circ \varphi \simeq id_X \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi \simeq id_Y .$$

Man schreibt dann kurz $X \simeq Y$ und nennt X und Y <u>homotopieäquivalent</u>.

Man sieht leicht: Verknüpfungen von Homotopieäquivalenzen sind wieder Homotopieäquivalenzen.

<u>Lemma</u> Ein topologischer Raum X ist kontrahierbar genau dann, wenn es homotopieäquivalent zu eine ein punktigen Raum ist.

<u>Beweis</u> Sei $\varphi : X \times [0,1] \to X$ stetig mit $\varphi_0 = id_X$, $\varphi_1(X) = \{p\}$ für ein $p \in X$. Betrachte

$$Y = \{p\} \xrightarrow{i} X \qquad i(p) = p \text{ , es folgt}$$

$$\varphi_1 \circ i(p) = p \rightsquigarrow \varphi_1 \circ i = id_Y$$

$\varphi_1 = i \circ \varphi_1 : X \to X$ ist homotop zu $\varphi_0 = id_X$

(*) ψ heißt dann <u>Homotopieinverse</u> zu φ.

Angenommen, $Y = \{y\}$ und $\varphi: X \to \{y\}$ ist Homotopie-äquivalenz, mit Homotopieinverse $\psi: \{y\} \to X$, $\psi(y) = p$.
Es folgt $\psi\circ\varphi(x) = p$ für alle $x \in X$ sowie $\psi\circ\varphi \simeq id_X$ $\square$

#

8. Satz Angenommen, $X \xrightarrow{\varphi} Y$ ist eine Homotopieäquivalenz von topologischen Räumen und $p \in X$. Dann ist
$$\varphi_\#: \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y, \varphi(p)) \text{ ein Isomorphismus.}$$

Beweis Der Beweis wäre sehr einfach, wenn wir annehmen könnten, dass es ein Homotopieinverse $\psi: Y \to X$ gibt mit $\psi\circ\varphi \simeq id_X$ rel p und $\varphi\circ\psi \simeq id_Y$ rel $\varphi(p)$.
Das wird aber im Allgemeinen nicht so sein.

Lemma Sei $\varphi: X \times [0,1] \to Y$ eine stetige Abbildung.
Sei $p \in X$, sei $\gamma(t) = \varphi_t(p)$. Dann kommutiert das Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \varphi_1(p)) \arrow[d, "c_{[\gamma]}", "\cong"'] \\ \pi_1(X,p) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_0"'] & \pi_1(Y, \varphi_0(p)) \end{tikzcd}$$

$c_{[\gamma]}[\alpha] = [\gamma] * [\alpha] * [\bar{\gamma}]$

Beweis Setze $\gamma_s(t) = \varphi_{st}(p)$ so $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_0 = \varepsilon_{\varphi_0(p)}$.

Sei $\alpha \in \Omega(X,p)$,
$$\psi_s(t) = ((\gamma_s * (\varphi_s \circ \alpha)) * \bar{\gamma}_s)(t) \text{ ist stetig und}$$

$[\psi_0] = (\varphi_0)_\#([\alpha])$ $\quad [\psi_1] = (\varphi_1)_\#(c_{[\gamma]}([\alpha]))$ $\square$

Beweis des Satzes. Sei ψ Homotopie invers zu φ.

Betrachte

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,p) \arrow[r, "\varphi_\#"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & \pi_1(Y,\varphi(p)) \arrow[r, "\psi_\#"] \arrow[rr, bend right, "\eta"'] & \pi_1(X,\psi\varphi(p)) \arrow[r, "\varphi_\#"] & \pi_1(Y,\varphi\psi\varphi(p)) \end{tikzcd}$$

Nun gilt:

$\xi = c_{[\gamma]}$ für ein geeignetes γ $\Rightarrow$ ξ Isomorphismus nach Lemma

Insbesondere ist die erste Abbildung injektiv. Genauso gilt

$\eta = c_{[\delta]}$ für ein geeignetes δ $\Rightarrow$ die zweite Abbildung ist injektiv. Weil ξ ein Isomorphismus ist, ist $\psi_\#$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Damit ist auch $\varphi_\#$ ein Isomorphismus. □

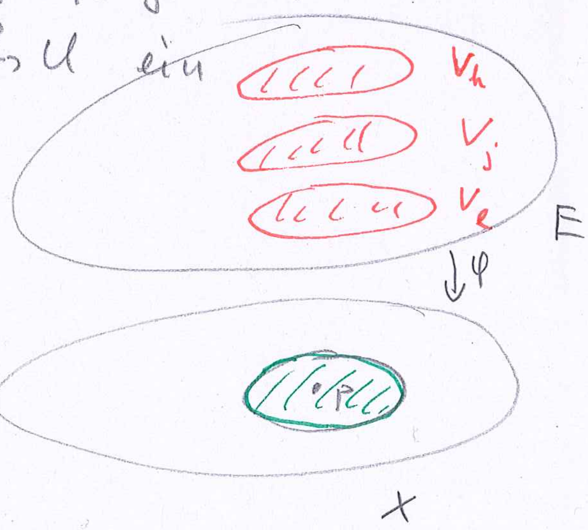
Korollar Ist X kontrahierbar, so gilt $\pi_1(X,p) = \{[\varepsilon_p]\}$ für alle $p \in X$.

Insbesondere gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Fundamentalgruppen sind <u>Überlagerungen</u>.

9. <u>Def</u> Seien E, X topologische Räume. Eine stetige surjektive Abbildung $\varphi: E \to X$ heißt <u>Überlagerung</u>, wenn es zu jedem $p \in X$ eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $p \in U$, so dass gilt: $\varphi^{-1}(U) \subseteq E$ ist disjunkte Vereinigung von offenen Mengen V_j, so dass für jede dieser Mengen V_j die Abbildung $V_j \xrightarrow{\varphi} U$ ein Homöomorphismus ist.

($j \in I$ beliebig große Indexmenge)



<u>Bsp</u> $\varphi = id_X : X \to X$ $(U = X)$

Sei $\varphi: E \to X$ eine Überlagerung, sei $\psi: Z \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{\psi}: Z \to E$ heißt <u>Lift</u> (<u>Anhebung</u>) von ψ, wenn gilt $\psi = \varphi \circ \tilde{\psi}$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

10. Satz: Sei $E \xrightarrow{\varphi} X$ eine Überlagerung, sei

$\psi : Z \times [0,1] \to X$ stetig (Z ein bel. top. Raum)
$(z,s) \longmapsto \psi_s(z)$

Angenommen, $\tilde{\psi}_0 : Z \times \{0\} \to E$ ist ein Lift von ψ_0.

Dann existiert genau ein Lift $\tilde{\psi} : Z \times [0,1] \to E$ der $\tilde{\psi}_0$ fortsetzt.

Korollar A: Ist $\alpha : [0,1] \to X$ stetig und $q \in E$ mit $\varphi(q) = \alpha(0)$, so gibt es genau einen Weg $\tilde{\alpha} : [0,1] \to E$ mit $\varphi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}(0) = q$.

Beweis: Wende den Satz an mit $Z = \{\alpha(0)\}$ □

Korollar B: Ist $\psi : [0,1] \times [0,1] \to X$ stetig, und $q \in E$ mit $\psi(0,0) = \varphi(q)$, so gibt es genau einen Lift $\tilde{\psi} : [0,1] \times [0,1] \to E$ mit $\tilde{\psi}(0,0) = q$.
$(s,t) \longmapsto \psi_s(t)$

Beweis: Korollar A liefert einen stetigen Lift von ψ_0; nochmals Korollar A liefert dann Lift von ψ. □

Korollar C: Ist $\varphi : E \to X$ eine Überlagerung und ist $q \in E$, so ist $\varphi_{\#} : \pi_1(E,q) \to \pi_1(X, \varphi(q))$ injektiv.

Beweis Sei $\alpha \in \Omega(E,q,q)$ mit $\varphi_\#([\alpha]) = [\varepsilon_{\varphi(q)}]$.

Es gibt also $\Psi: [0,1]\times[0,1] \to X$ stetig mit $\Psi_0 = \varphi\circ\alpha$ und $\Psi_1 = \varepsilon_{\varphi(q)}$ sowie $\Psi_s(0) = \Psi_s(1) = \varphi(q)$.

Sei $\tilde\Psi: [0,1]\times[0,1] \to X$ der eindeutige Lift von Ψ mit $\tilde\Psi_0(0) = q$. Da α ein Lift von Ψ_0 ist, folgt aus Kor. A, dass $\tilde\Psi_0 = \alpha$. Da ε_q ein Lift von $s \mapsto \Psi_s(0)$ bzw $s \mapsto \Psi_s(1)$ ist, folgt $\tilde\Psi_s(0) = \tilde\Psi_s(1) = q$ für alle s. Da ε_q ein Lift von $\Psi_1 = \varepsilon_{\varphi(q)}$ ist, folgt $\tilde\Psi_1 = \varepsilon_q$. Also $\alpha \simeq \varepsilon_q$ rel ∂. □

Korollar D Sei $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ die Kreislinie, sei $p = (1,0) \in S^1$. Dann ist $\pi_1(S^1,p) \cong \mathbb{Z}$, ein Erzeuger ist die Schleife $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi(t)))$

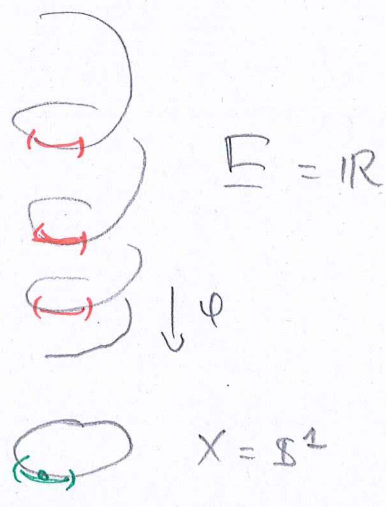
Beweis Betrachte die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \to S^1$, $\varphi(r) = (\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$. Das ist eine Überlagerung. (!)

Sei $\alpha_n(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t))$

$\alpha_n \in \Omega(S^1,p)$

$[\alpha]^n = [\alpha_n]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

$\tilde\alpha_n(t) = n\cdot t$ ist Lift mit $\tilde\alpha_n(0) = 0$



Sei nun $\beta \in \Omega(S^1, p)$ beliebig, mit Lift $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}(0) = 0 \in \mathbb{R}$. Weil $\beta(1) = p$ folgt $\tilde{\beta}(1) = l \in \mathbb{Z}$. Nun gilt $\tilde{\beta} \simeq \tilde{\alpha}_n$ rel ∂ mit der Homotopie $(s,t) \longmapsto \tilde{\beta}(t) \cdot s + \tilde{\alpha}_n(t)(1-s)$.

Es folgt $[\beta] = [\alpha_n]$, also $\pi_1(S^1, p) = \{[\alpha_n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Für $k \neq l$ gilt $\tilde{\alpha}_k(1) = k \neq l = \tilde{\alpha}_l(1)$, also $\alpha_k \not\simeq \alpha_l$ rel ∂.

□

Beweis des Satzes

Wir beweisen zuerst den Spezialfall aus Korollar A.

Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg. Da $[0,1]$ kompakt ist, finden wir Zahlen $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_N = 1$ so, dass $\alpha([s_{k-1}, s_k])$ in einer offenen Menge U_k mit Eigenschaft (*) aus Def §5.9 liegt.

$$\begin{tikzcd} & V_k \subseteq E \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] \\ {[s_{k-1}, s_k]} \arrow[r, "\alpha"] & U_k \subseteq X \end{tikzcd}$$

$V_0 \cong U_0$

Wähle $V_0 \subseteq E$ mit $q \in V_0$, so gibt es einen Lift $[s_{k-1}, s_k] \xrightarrow{\tilde{\alpha}} V_0$ mit $\tilde{\alpha}(0) = q$. Wähle dann induktiv V_k so, dass $\alpha(s_{k-1}) \in V_k$, $V_k \xrightarrow[\cong]{\varphi} U_k$

Damit erhalten wir einen Lift $\tilde{\alpha}$ von α mit $\tilde{\alpha}(0)=q$.

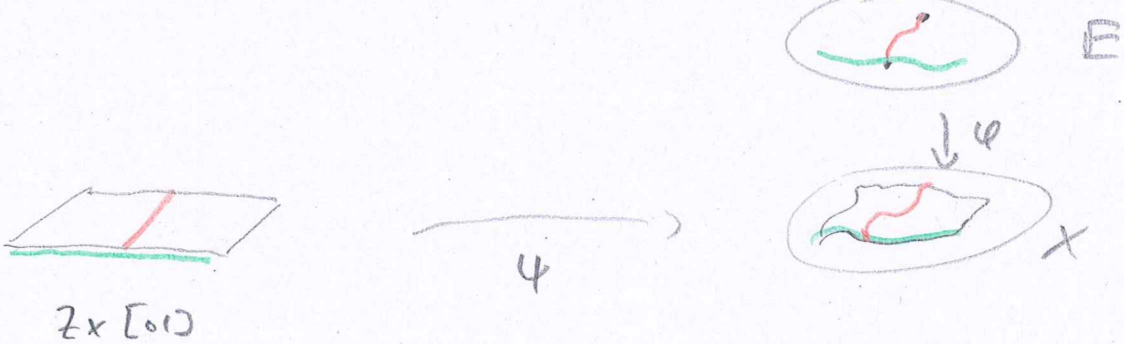
Da $[s_{k-1}, s_k]$ zusammenhängend ist und da die Urbilder von U_k aus disjunkten offenen Mengen bestehen, ist der Lift auf jedem Teilstück eindeutig, also ist $\tilde{\alpha}$ eindeutig bestimmt.

Jetzt der allgemeine Fall.

Für jedes $z \in Z$ gibt es genau einen Lift von

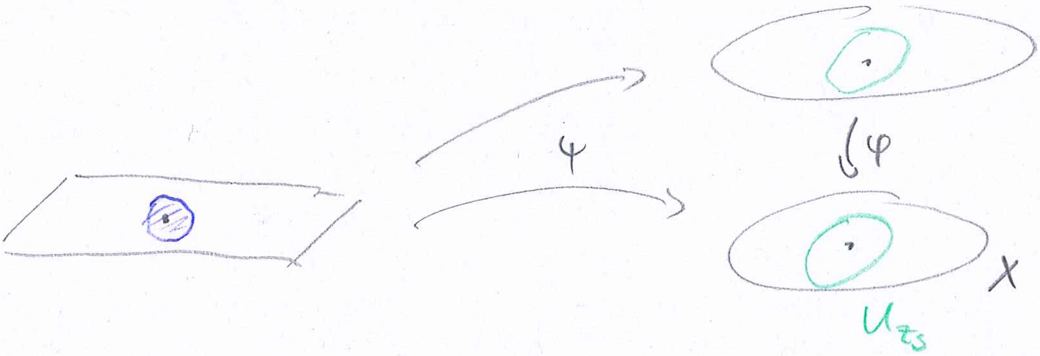
$$\psi : \{z\} \times [0,1] \to X \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}((z,0)) \text{ vorgegeben.}$$

Damit folgt schon die Eindeutigkeit von $\tilde{\psi}$.

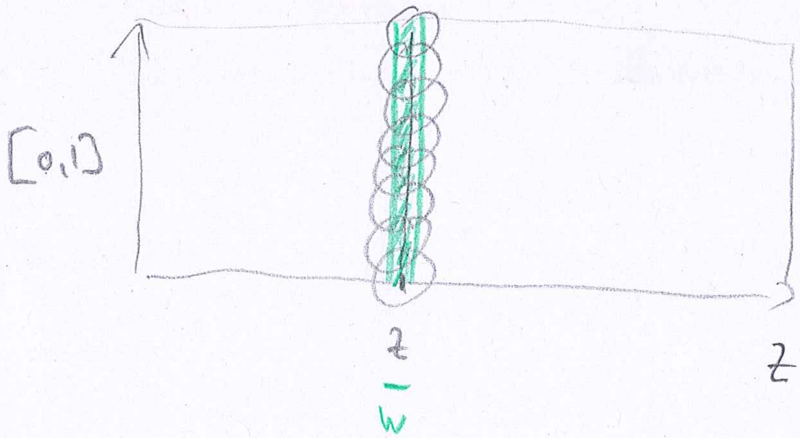


Existenz: Zu jedem $(z,s) \in Z \times [0,1]$ gibt es $U_{z,s} \subseteq X$ offen mit $\psi(z,s) \in U_{z,s}$ und Eigenschaft (*).

Damit können wir (bei vorgegebenem Wert an der Stelle (z,s)) in einer kleinen Umgebung von (z,s) liften



Da $[0,1]$ kompakt ist, finden wir zu jedem $z \in Z$ eine offene Menge $W \subseteq Z$ mit $z \in W$ sowie $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$ so, dass $\Psi(W \times [s_{k-1}, s_k])$ in einer offenen Menge mit Eigenschaft (*) liegt. Damit können wir Ψ auf den Mengen $W \times [s_{k-1}, s_k]$ wie gewünscht liften. Die Eindeutigkeitsaussage zeigt, dass die Lifts auf den Streifen zusammen passen. $\square$



11. Beobachtungen

① Ist $\varphi: X \to Y$ stetig und surjektiv und ist X wegzush., so ist auch $Y = \varphi(X)$ wegzush.

② Ist $\varphi: E \to X$ eine Überlagerung, so ist φ offen (Bilder offener Mengen sind offen)

③ Ist $\varphi: E \to X$ eine Überlagerung und ist X wegzush (z.B. folgt das aus ①, wenn E wegzush. ist), so gilt für alle $p, q \in X$, dass $\# \varphi^{-1}(p) = \# \varphi^{-1}(q)$

Denn: ①, ② sind klar. Zu ③: Verbinde p, q durch einen Weg α und unterteile $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_n$ so, dass $\alpha([s_{k-1}, s_k])$ in einer offenen Menge mit ⊛ aus Def. § 5.9 liegt. Es folgt $\# \varphi^{-1}(\alpha(s_{k-1})) = \# \varphi^{-1}(\alpha(s))$ für $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ □

12. Satz Sei $E \xrightarrow{\varphi} X$ eine Überlagerung, sei E wegzush.

Dann gilt $[\pi_1(X, p) ; \varphi_\# \pi_1(E, q)] = \# \varphi^{-1}(p)$ für alle $p \in X$, $q \in E$ mit $\varphi(q) = p$.

(Beachte: $\varphi_\#$ ist injektiv nach § 5.10 c!)

Beweis Für $\gamma \in \Omega(X, p)$ sei $\tilde{\gamma}$ der eindeutige Lift mit $\tilde{\gamma}(0) = q$. Falls $[\alpha] \in \varphi_\# \pi_1(E, q)$, so folgt $\tilde{\alpha}(1) = q$. Es gilt dann für $[\beta] \in \pi_1(X, p)$ beliebig, dass $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta} = \widetilde{\alpha * \beta} \Rightarrow \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}(1)$

↑ Eindeutigkeit des Lifts

d.h. wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi_\# \pi_1(E,q) \backslash \pi_1(X,p) \xrightarrow{\varkappa} \varphi^{-1}(p) \quad , \quad \varphi_\#\pi_1(E,q)[\beta] \mapsto \tilde{\beta}(1)$$

↑ Rechtsnebenklassen

Da E wegzush. ist, ist $\varkappa$ surjektiv. Ist

$\tilde{\beta}(1) = \tilde{\gamma}(1)$, so ist $[\tilde{\beta} * \overline{\tilde{\gamma}}] \in \Omega(E,q)$, also

$\varphi_\# \pi_1(E,q)[\beta] = \varphi_\# \pi_1(E,q)[\gamma]$ wegen

$\varphi_\# [\tilde{\beta} * \overline{\tilde{\gamma}}] = [\beta] * [\overline{\gamma}]$, damit ist $\varkappa$ bijektiv. □

Satz 12 werden wir benutzen, um die Indices von Untergruppen in freien Gruppen zu berechnen. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen $\pi_1(E,q)$ und $\pi_1(X,p)$ jetzt noch genauer.

13. <u>Def</u> Ein topologischer Raum X heißt <u>lokal wegzush.</u>, wenn es für jedes $p \in X$, $U \subseteq X$ mit $p \in U$, U offen, ein $V \subseteq X$ offen gibt mit $p \in V \subseteq U$, so dass V wegzush. ist.

<u>Bsp</u>: jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist lokal wegzush. (aber nicht notwendig wegzush!)

Theorem Sei $E \xrightarrow{\varphi} X$ eine Überlagerung, sei Z lokal wegzush. und wegzush. Sei $\psi: Z \to X$ stetig, sei $z \in Z$, $p = \psi(z)$ und $q \in \varphi^{-1}(p)$.

Dann gibt es einen Lift $\tilde{\psi}: Z \to E$ mit $\tilde{\psi}(z) = q$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

genau dann, wenn $\psi_{\#} \pi_1(Z,z) \subseteq \varphi_{\#} \pi_1(E,q)$.

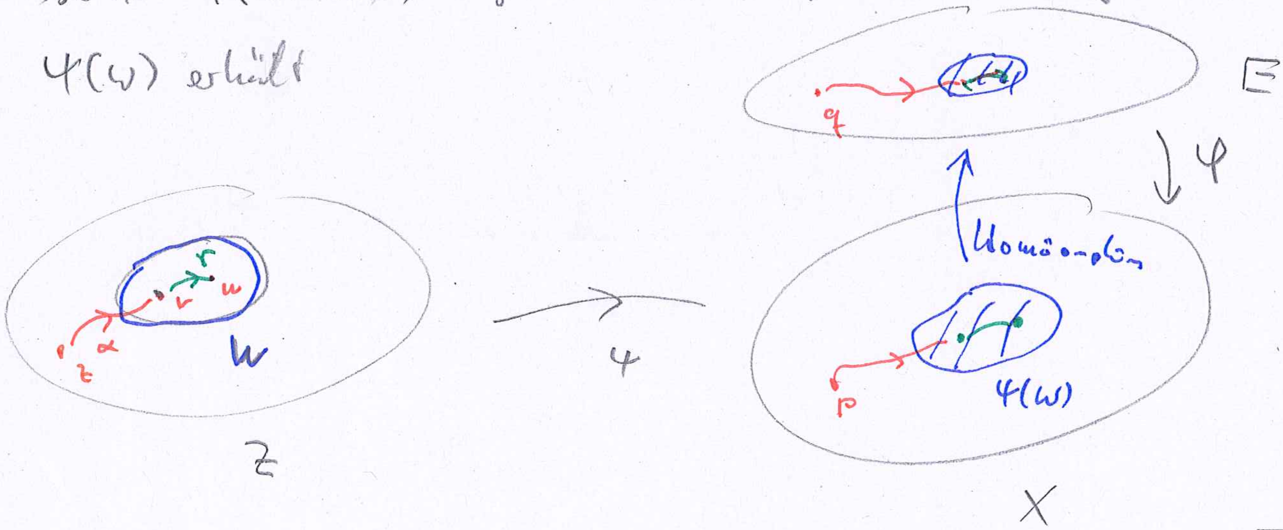
[Beachte: ein topologisches Problem wird hier zu einem alg. Problem!] #

Beweis Klar: wenn ein Lift $\tilde{\psi}$ existiert, so folgt aus $\psi = \varphi \circ \tilde{\psi}$ die Inklusion der Gruppen.

Für die andere Implikation zeigen wir zuerst die Eindeutigkeit. Dazu brauchen wir nur, dass Z wegzush. ist.

Ist $v \in Z$, so gibt es einen Weg $\alpha \in \Omega(Z, z, v)$. Sei $\tilde{\psi}(v) = \widetilde{\psi \circ \alpha}(1)$, wobei $\widetilde{\psi \circ \alpha}$ der eindeutige Lift von $\psi \circ \alpha$ mit $\widetilde{\psi \circ \alpha}(0) = q$ ist. Ist $\beta \in \Omega(Z, z, v)$ ein zweiter Weg, so folgt wegen $[\psi \circ \alpha * \overline{\psi \circ \beta}] \in \psi_{\#} \pi_1(Z,z)$ und unserer Annahme, dass $\widetilde{(\psi \circ \alpha) * \overline{\psi \circ \beta}}$ ein Weg von q nach q ist. Folglich ist $\widetilde{\psi \circ \beta}(1) = \widetilde{\psi \circ \alpha}(1)$, d.h. $\tilde{\psi}$ ist wohldefiniert und eindeutig durch ψ und q bestimmt.

Um zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ stetig ist, benutzen wir den lokalen Wegzusammenhang. Zu $v \in Z$ finden wir eine kleine offene Umgebung W von z, die wegzusammenhängend ist und deren Bild $\varphi(W)$ in einer offenen Menge mit Eigenschaft (*) aus Def §5.9 liegt. Für $w \in W$ existiert ein Weg γ in W von v nach w. Ist $\alpha \in \Omega(Z, z, v)$, so ist $\widetilde{\varphi(\alpha * \gamma)}(1)$ genau der Punkt, den man stetig über $\varphi(\gamma)$ erhält.



$\square$

Korollar (zum 1. Teil des Beweises)

Ist Z wegzush., $E \xrightarrow{\varrho} X$ ein Überlagerung, $\varphi: Z \to X$ stetig, $z \in Z$ und $q \in E$ mit $\varphi(z) = \varrho(q)$, und sind $\tilde{\varphi}$ sowie $\tilde{\varphi}'$ zwei Lifts von φ mit $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}'(z) = q$, so gilt schon $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$. $\square$

14. Def Sei $E \xrightarrow{\varphi} X$ eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus (stetige Bijektion mit stetiger Inverse) $\psi : E \to E$ heißt Decktransformation, wenn gilt $\varphi \circ \psi = \varphi$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & E \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Die Decktransformationen bilden eine Gruppe $\mathrm{Deck}(E \xrightarrow{\varphi} X)$
$= \{ \psi : E \to E \mid \psi \text{ Decktransformation} \}$

Def Ist G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist der Normalisator von H in G die Untergruppe

$$\mathrm{Nor}_G(H) = \{ n \in G \mid nHn^{-1} = H \}$$

Klar: $H \trianglelefteq \mathrm{Nor}_G(H)$, sowie $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \mathrm{Nor}_G(H) = G$

Theorem Sei $E \xrightarrow{\varphi} X$ eine Überlagerung, sei E wegzush. und lokal wegzush. Sei $u, v \in E$ mit $p = \varphi(u) = \varphi(v)$. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Decktransformation $\psi \in \mathrm{Deck}(E \to X)$ mit $\psi(u) = v$

(ii) Ist $\alpha \in \Omega(E, u, v)$, so gilt

$$[\varphi \alpha] \in \mathrm{Nor}_{\pi_1(X,p)} \varphi_\# \pi_1(E, u)$$

Wenn diese beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, dann gilt

$$\mathrm{Deck}(E \to X) \cong N/H$$

wobei $H = \varphi_{\#}\pi_1(E,u) \cong \pi_1(E,u)$

$$N = \mathrm{Nor}_{\pi_1(X,p)} H \subseteq \pi_1(X,p)$$

<u>Beweis</u> <u>(i) ⇒ (ii)</u> Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & E \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(E,u) \arrow[rr, "\cong", "\psi_{\#}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\#}"'] & & \pi_1(E,v) \arrow[dl, "\varphi_{\#}"] \\ & \pi_1(X,p) & \end{tikzcd}$$

Für $\alpha \in \Omega(E,u,v)$ und $\gamma \in \Omega(E,u,u)$ gilt

$(\bar{\alpha} * \gamma) * \alpha \in \Omega(E,v)$, also

$$\varphi_{\#}[(\bar{\alpha} * \gamma) * \alpha] = \varphi_{\#}[\bar{\alpha}] * \underbrace{\varphi_{\#}[\gamma]}_{\in \varphi_{\#}\pi_1(E,u)} * \varphi_{\#}[\alpha] \in \varphi_{\#}\pi_1(E,v)$$

$$= \varphi_{\#}\pi_1(E,u)$$

Diagramm oben!

also liegt $\varphi_{\#}[\alpha]$ im Normalisator.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\alpha \in \Omega(E,u,v)$ mit $[\varphi \circ \alpha]$ in Normalisator. Betrachte das Lift-Problem

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

zu $\psi(u) = v$

Jedes Element $[\gamma] \in \pi_1(E,u)$ lässt sich schreiben als

$[\gamma] = [\alpha] * [\beta] * [\bar{\alpha}]$ für ein $[\beta] \in \pi_1(E,v)$.

Folglich gilt $\varphi_\#(\pi_1(E,u)) \subseteq \varphi_\#(\pi_1(E,v))$ und

Thm §5.13 gibt uns die Existenz von ψ.

Genauso gibt es eine Lösung χ zu

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[ur, dashed, "\chi"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

mit $\chi(v) = u$

Damit ist $\chi \circ \psi$ Lösung zu

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

$\chi\psi(u) = u$

aus der Eindeutigkeit in §5.31 folgt $\chi \circ \psi = id_E$

genauso $\psi \circ \chi = id_E \rightsquigarrow \psi \in \mathrm{Deck}(E \to X)$.

Zum Isomorphismus $\mathrm{Deck}(E \to X) \cong N/H$.

Für $[\alpha] \in N$ sei $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = u$. Wir wissen schon: es gibt genau ein $\varphi = \varphi_{[\alpha]} \in \mathrm{Deck}(E \to X)$ mit $\varphi_{[\alpha]}(u) = \tilde{\alpha}(1)$.

Beh: die Zuordnung $[\alpha] \mapsto \varphi_{[\alpha]}$ ist der gesuchte Isomorphismus.

Denn: ist $[\alpha], [\beta] \in N$, so folgt

$$\varphi_{[\alpha]*[\beta]}(u) = \widetilde{\alpha * \beta}(1)$$

Setze $\tilde{\gamma} = \varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}$, dann folgt $\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * \tilde{\gamma}$,

also $\varphi_{[\alpha]*[\beta]}(u) = \varphi_{[\alpha]} \tilde{\beta}(1) = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}(u)$

$\Rightarrow$ die Abbildung ist ein Homomorphismus. Surjektiv ist sie nach (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Es gilt $\varphi_{[\alpha]}(u) = u$

$\Leftrightarrow \varphi_{[\alpha]} = id_E$, andererseits $\varphi_{[\alpha]}(u) = u \Leftrightarrow$

$\tilde{\alpha} \in \pi_1(E, u) \Leftrightarrow \varphi_\#[\tilde{\alpha}] \in H \Leftrightarrow [\alpha] \in H$ $\square$

#

15. <u>Bem</u> Ein wegzush. top. Raum E heißt <u>einfach zusammenhängend</u> oder 1-zusammenhängend, wenn für $q \in E$ gilt $\pi_1(E,q) = \{[\varepsilon_q]\}$.

Spezialfall von Thm §5.14: Ist $E \xrightarrow{\varphi} X$ ein Überlagerung, ist E einfach zush. und lokal zush., so gilt

$$\mathrm{Deck}(E \xrightarrow{\varphi} X) \cong \pi_1(X,p)$$

und $\pi_1(X,p)$ wirkt <u>transitiv und frei</u> auf $\varphi^{-1}(p)$

<u>Bem</u> In § 5.12 hatte wir eine Bijektion

$$\varphi_{\#}\pi_1(E,q) \backslash \pi_1(X,p) \longrightarrow \varphi^{-1}(p)$$

konstruiert. In ÜA 9.3 zeigen Sie, dass $\pi_1(X,p)$ (von rechts) transitiv auf $\varphi^{-1}(p)$ wirkt, der Stabilisator von q ist dabei genau $\varphi_{\#}\pi_1(E,q)$.

16. Der Satz von Seifert-Van Kampen

Wir betrachten folgende Situation. Sei X ein topologischer Raum, sei $p \in X$ ein Grundpunkt, sei $\mathcal{U}$ eine Menge von offenen Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften.

(a) $X = \bigcup \mathcal{U}$ und für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $p \in U$.

(b) für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ ist $U \cap V \cap W$ wegzusammenhängend, insbesondere sind alle $U \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend.

Wir geben folgenden Inklusionen Namen:

$$\iota_U : U \hookrightarrow X \qquad \text{für } U \in \mathcal{U}$$

$$\iota_{U,V} : U \cap V \hookrightarrow V \qquad \text{für } U, V \in \mathcal{U}$$

<u>Lemma A</u> Wenn die Voraussetzungen (a) und (b) oben erfüllt sind, dann ist die Abbildung

$$\mathop{\ast}_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U,p) \xrightarrow{\Phi} \pi_1(X,p)$$

zu den Homomorphismen $(\iota_U)_\# : \pi_1(U,p) \longrightarrow \pi_1(X,p)$ surjektiv.

<u>Beweis</u> Sei $\alpha \in \Omega(X,p)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, finden wir eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1$

mit $\alpha([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U_k \in \mathcal{U}$, $k = 1, \dots, N$.

Setze $\alpha_k(t) = \alpha(s_{k-1} + t(s_k - s_{k-1}))$, wähle Weg

$\delta_k \in \Omega(U_{k-1} \cap U_k, p, \alpha(s_k))$. Es folgt

$[\alpha] = [\alpha_1] * \dots * [\alpha_N]$

$= [\alpha_1] * [\bar{\delta}_1] * [\delta_1] * [\alpha_2] \dots * [\delta_{N-1}] * [\bar{\delta}_{N-1}] * [\alpha_N]$

und $\alpha_1 * \bar{\delta}_1 \in \Omega(U_1, p)$

$(\delta_1 * \alpha_2) * \bar{\delta}_2 \in \Omega(U_2, p)$ usw

$\Rightarrow [\alpha]$ liegt im Bild von Φ $\square$

<u>Korollar</u> Für alle $n \geq 2$, $p \in S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1 \}$

gilt $\pi_1(S^n, p) = \{[c_p]\}$.

<u>Beweis</u> Wähle $q \neq p$ in S^n, setze $U = S^n - \{q\} \cong \mathbb{R}^n$
$V = S^n - \{-q\} \cong \mathbb{R}^n$
$U \cap V \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$

$\mathcal{U} = \{U, V\}$, es folgt $\pi_1(U, p) = \{[c_p]\} = \pi_1(V, p)$.

[Wo benutzt wir $n \geq 2$??] $\square$

<u>Lemma B</u> Sei $\iota_U : \pi_1(U, p) \to \ast_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, p)$ die kanonische

Inklusion, vgl §2.4. Sei

$L = \{ \iota_U[\alpha] \cdot (\iota_V[\alpha])^{-1} \mid U, V \in \mathcal{U}, \alpha \in \Omega(U \cap V, p) \}$

Dann gilt $L \subseteq \ker(\Phi)$.

Beweis Für $\alpha \in \Omega(U \cap V, p)$ gilt

$$(\rho_U)_\# (\rho_{U,V})_\# [\alpha] = (\rho_V)_\# (\rho_{V,U})_\# [\alpha]$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "\rho_U"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "\rho_{V,U}"] \arrow[dr, "\rho_{U,V}"'] & & X \\
 & V \arrow[ur, "\rho_V"'] &
\end{tikzcd}$$

also $\Phi\big(\iota_U (\rho_{U,V})_\# [\alpha] \big) = \Phi\big(\iota_V (\rho_{V,U})_\# [\alpha] \big)$ $\square$

Theorem (Satz von Seifert - Van Kampen)

Unter den Voraussetzungen (a) und (b) gilt

$$\pi_1(X,p) \cong \mathop{\Large *}_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U,p) \Big/ \langle\langle L \rangle\rangle$$

Beweis Wir müssen zeigen, dass gilt $\ker \Phi = \langle\langle L \rangle\rangle$, die Inklusion "$\supseteq$" ist schon bewiesen.

Für jedes Element $[\alpha] \in \pi_1(X,p)$ erhalten wir eine Darstellung der Form

$$[\alpha] = \Phi\big(\iota_{U_1}[\alpha_1] \cdots \iota_{U_n}[\alpha_n] \big) \qquad [\alpha_j] \in \pi_1(U_j,p), \quad U_j \in \mathcal{U}$$

Wir nennen $\iota_{U_1}[\alpha_1] \cdots \iota_{U_n}[\alpha_n]$ eine Faktorisierung für $[\alpha]$.

Wir nennen zwei Faktorisierungen äquivalent, wenn sie durch folgende Operationen auseinander hervorgehen.

(I) Ersetze $L_u[\alpha] L_u[\beta]$ durch $L_{(u)}([\alpha] * [\beta])$

($\bar{I}$) das gleiche rückwärts

(II) Ist $\alpha \in \Omega(U \cap V, p)$, so ersetze $L_U[\alpha]$ durch $L_V[\beta]$

Klar: • I, $\bar{I}$ ändern das Wort im freien Produkt nicht.

• II ändert das Wort modulo $\langle\langle L \rangle\rangle$ nicht.

• beide Operationen ändern also $\Phi([\alpha])$ nicht ab.

Lemma C Wenn gilt

$$\Phi(L_{U_1}[\alpha_1] \cdots L_{U_m}[\alpha_m]) = \Phi(L_{V_1}[\beta_1] \cdots L_{V_n}[\beta_n]),$$

dann sind beide Faktorisierungen äquivalent im obigen Sinne.

⌈Daraus folgt insbesondere $\ker(\Phi) \subseteq \langle\langle L \rangle\rangle$ und Satz.⌉

⌊Van Kampen ist bewiesen⌋

Beweis von Lemma C Es gibt nach Annahme eine Homotopie $\varphi: [0,1] \times [0,1] \to X$ rel ∂ zwischen

$\varphi_0 = ((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \cdots) * \alpha_m$ und

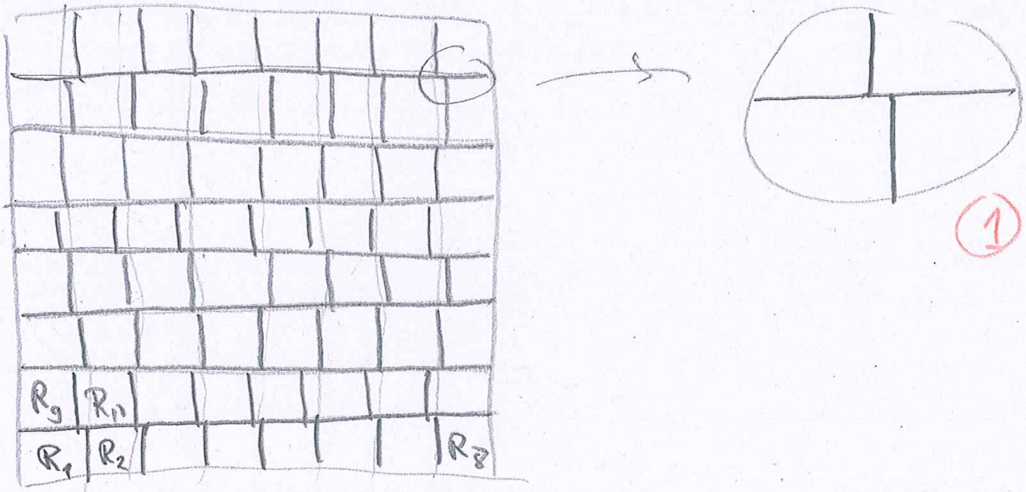
$\varphi_1 = (((\beta_1 * \beta_2 \cdots\cdots) * \beta_n$

Über die Kompaktheit von $[0,1] \times [0,1] = Q$ finden wir eine Zerlegung von Q in N^2 kleine Rechtecke

$R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{N^2} = Q$, für $N \gg 1$, mit

Eigenschaften 1, 2, 3

Q



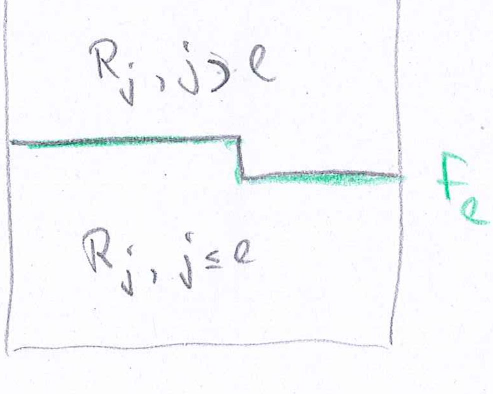
In jeder Ecke treffen höchstens **drei** Rechtecke aufeinander (1)

(2) $\varphi(R_j) \subseteq U_{R_j} \in \mathcal{U}$ für jedes j

(3) Die Zerlegung an Ober- und Unterkante verfeinern die Zerlegungen zu $(\alpha_1 * \alpha_2) * \ldots * \alpha_m$ bzw. $(\beta_1 * \beta_2) \ldots * \beta_n$

Für jeden Rechtecksecke $v \in A \cap B \cap C$ (A, B, C Rechtecke) wähle Weg γ_v von p nach $\varphi(v)$ in $U_A \cap U_B \cap U_C$ $(\Rightarrow (b))$ (hier braucht wir Bedingung (b)). An Ober- und Unterkante wählen wir γ_v zusätzlich so, dass γ_v ein Weg in $U_A \cap U_B \cap V_k$ ist, wenn v im Definitionsbereich k-ten Teilstücks in $(\alpha_1 * \ldots) * \alpha_m$ ist, ähnlich für die β_k.

Sei F_e (folgender) Weg in Q:



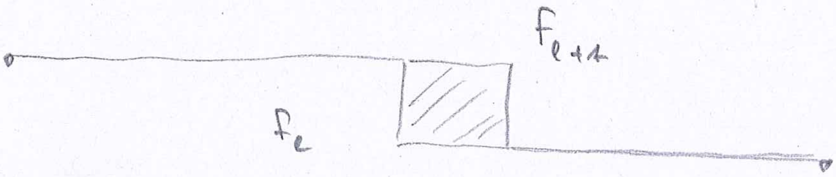
Durch Einfügen der r_ν in

$\varphi \circ f_\ell$ erhalten wir Faktorisierung so, dass

$\varphi \circ f_0$ äquivalent zu $(\alpha_1 * \alpha_2) \cdots * \alpha_m$

$\varphi \circ f_{N^2}$ äquivalent zu $(\beta_1 * \beta_2) \cdots * \beta_n$

$\varphi \circ f_\ell$ äquivalent zu $\varphi \circ f_{\ell+1}$



Vgl auch Hatcher, Section 1.2. $\square$

Wir notieren einen wichtigen Spezialfall des Satzes von Seifert-Van Kampen.

17. <u>Korollar</u> Sei $p \in X$, X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ Menge von offenen Teilmengen von X mit:

(1) $X = \bigcup \mathcal{U}$ und für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $p \in U$.

(2) Für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ ist $U \cap V \cap W$ wegzusammenhängend.

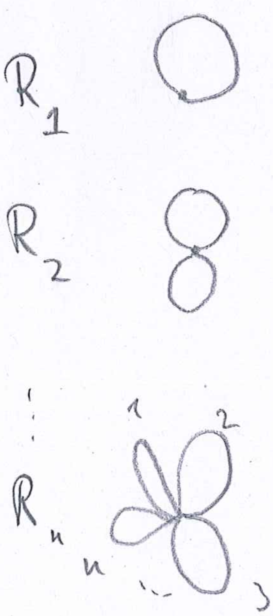
(3) Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \neq V$ gilt
$\pi_1(U \cap V, p) = \{[\varepsilon_p]\}$.

Dann gilt $\pi_1(X, p) \cong \mathop{\ast}\limits_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, p)$ □

18. Sei $n \geq 1$. Die <u>Rose mit n Blättern</u> ist

$R_n = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} \mid |z_j|^2 = 1$ für alle j, $z_k \neq 1$ gilt für <u>höchstens ein</u> $k \}$

$p = (1, \dots, 1) \in R_n$



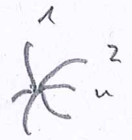
Dann gilt:

$\pi_1(R_n, p) = F_n$ freie Gruppe mit n Erzeugern $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]$

$\alpha_j(t) = (1, \ldots 1, \underset{j}{\exp(2\pi i t)}, 1, \ldots, 1)$ $\quad i = \sqrt{-1}$

$= \exp(it)$

Beweis Setze $W = \{(z_1, \ldots, z_n) \in R_n \mid |z_j - 1| < \frac{1}{2} \text{ für alle } j\}$

W ist kontrahierbar und offen $\quad W$ 

$U_j = W \cup \{(z_1, \ldots, z_n) \in R_n \mid z_k = 1 \text{ für } j \neq k\}$

U_j  $\quad U_j \subseteq R_n$ offen

$U_j \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(U_j, p) \cong \mathbb{Z}$

mit Erzeuger $[\alpha_j]$ wie oben

Für $j \neq k$ gilt $U_j \cap U_k = W$. Aus §5.17

folgt $\pi_1(R_n, p) \cong \mathop{*}_{p=1}^{n} \pi_1(U_j, p) \cong F_n$ $\square$

Beachte auch: $R_n \subseteq T^n = S^1 \times \ldots \times S^n$

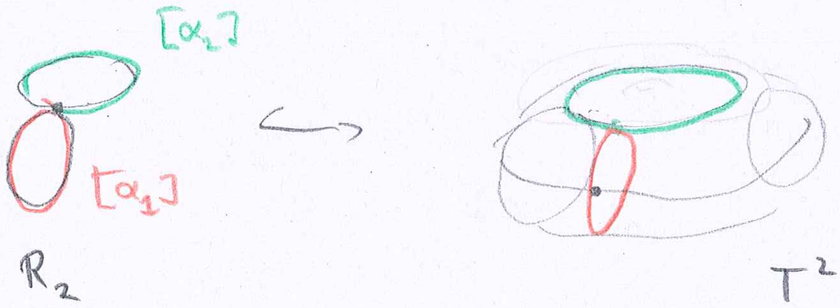
$S^1_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Wir wissen: $\pi_1(T^n, p) = \prod_{j=1}^{n} \pi_1(S^1, 1)$ (vgl §5.5)

Die Inklusion $R_n \hookrightarrow T^n$ ergibt für die Fundamentalgruppen die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R_n, p) & \longrightarrow & \pi_1(T^n, p) \\ \cong & & \cong \\ F_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n = (F_n)_{ab} \end{array}$$

<u>$n = 2$</u>



In T^2 gilt $((\alpha_1 * \alpha_2) * \bar{\alpha}_1) * \bar{\alpha}_2 \simeq \varepsilon_p$ rel ∂

d.h. $\big[[\alpha_1], [\alpha_2]\big] = [\varepsilon_p]$ in $\pi_1(T^2, p)$

Diese Relation wurde in R_2 "eingeklebt" $\leadsto$ später.

19. <u>Theorem</u> (klassische Version von Seifert - Van Kampen)

Sei X ein topologischer Raum, seien $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $p \in U \cap V$. Wenn $U, V, U \cap V$ wegzusammenh. sind, so gilt

$$\pi_1(X,p) = \varinjlim \left(\pi_1(U,p) \leftarrow \pi_1(U \cap V, p) \longrightarrow \pi_1(V,p) \right),$$

die Fundamentalgruppe von X ist der Kolimes von

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \pi_1(U,p) \\ \pi_1(U \cap V, p) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \pi_1(V,p) \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> In diesem Fall ist die Menge L aus §5.16 genau die Menge, die in §4.1 zur Konstruktion des Kolimes benutzt wurde. $\square$