§2 Produkt und Koprodukt, freie Gruppen

1. Erinnerung Ist I eine beliebige (nicht leere) Indexmenge und $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, so ist das Produkt der G_i die Gruppe

$$\prod_{i\in I} G_i$$

Die Elemente des Produkts sind Folgen $(g_i)_{i\in I}$ mit $g_i \in G_i$, die Verknüpfung ist komponentenweise definiert

$$(g_i)_{i\in I}\cdot(h_i)_{i\in I} = (g_i h_i)_{i\in I}$$

Für $j\in I$ definiere $\pi_j : \prod_{i\in I} G_i \to G_j$ durch $\pi_j((g_i)_{i\in I}) = g_j$. Dann ist π_j ein Epimorphismus.

Das Produkt ist durch eine universelle Eigenschaft gekennzeichnet.

2. <u>Satz</u> Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, sei H eine Gruppe und seien $\varphi_i : H \to G_i$ Homomorphismen. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : H \to \prod_{i\in I} G_i$ so, dass

$\varphi_j = \pi_j \circ \varphi$ für alle $j \in I$ gilt.

Diese Eigenschaft kennzeichnet $(\prod_{i\in I} G_i, \{\pi_j \mid j\in I\})$ bis auf Isomorphie eindeutig.

<u>Beweis</u> <u>Existenz von φ</u>: setze $\varphi(h) = (\varphi_i(h))_{i\in I}$

<u>Eindeutigkeit von φ</u>: Ist $\varphi' : H \to \prod_{i\in I} G_i$ ein Homomorphismus mit $\pi_j \circ \varphi' = \varphi_j$, so folgt

$$\varphi_j(h) = \pi_j(\varphi'(h)) \qquad (\varphi'(h) = (g_i)_{i\in I})$$
$$= g_j \Rightarrow \varphi'(h) = (\varphi_j(h))_{j\in I} = \varphi(h)$$

<u>Kennzeichnung des Produktes</u> Angenommen, P ist eine Gruppe mit Epimorphismen $\rho_i : P \to G_i$ so, dass es zu jeder Familie von Homomorphismen $\varphi_i : H \to G_i$ genau einen Homomorphismus $\varphi : H \to P$ gibt mit

$\rho_i \circ \varphi = \varphi_i$

#

Betrachte

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left] \arrow[d, "g_j"] & \prod\limits_{i\in I} G_i \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\pi_j"] \\ G_j \arrow[r, equal] & G_j \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ existiert eindeutig nach der oben gezeigten

$\longrightarrow$ existiert eindeutig nach Annahme über P

$\longrightarrow\ \longrightarrow\ = \mathrm{id}_{\prod\limits_{i\in I} G_i}$ wegen Eindeutigkeit

$\longrightarrow\ \longrightarrow\ = \mathrm{id}_P$ wegen Eindeutigkeit

also $P \cong \prod\limits_{i\in I} G_i$ $\square$

Universelle Eigenschaften dieser Art tauchen vor allem in der Algebra und der Topologie auf. Sie sind oft sehr nützlich.

Wir <u>dualisieren</u> nun die universelle Eigenschaft von Produkten, d.h. wir "drehen alle Pfeile um" und sehen, was wir dann für Strukturen erhalten.

Das führt zu <u>Koprodukten</u> und <u>freien Gruppen</u>.

3. Koprodukte

Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen.

Ein reduziertes Wort ist ein Tupel

$$w = (g_1, i_1, g_2, i_2, \dots, g_m, i_m)$$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $g_k \in G_{i_k} - \{1\}$, $i_k \in I$ für alle k

(ii) $i_k \neq i_{k+1}$ für alle k

Wir nehmen das leere Wort ( ) dazu. Sei

kein Eintrag

$\mathcal{W}$ die Menge aller reduzierten Wörter.

Auf $\mathcal{W}$ definieren wir eine Verknüpfung $* : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ durch folgende Regeln

(a) $(g_1, i_1, \dots, g_m, i_m) * (h_1, j_1, \dots, h_n, j_n) = (g_1, i_1, \dots, g_m, i_m, h_1, j_1, \dots, h_n, j_n)$

falls $i_m \neq j_1$

(b) $(g_1, i_1, \dots, g_m, i_m) * (h_1, \dots, j_m) = (g_1, i_1, \dots, g_m h_1, j_1, \dots, h_n, j_n)$

falls $i_m = j_1$ und $g_m h_1 \neq 1$

(c) $(g_1, \dots, i_m) * (h_1, \dots, j_m) = (g_1, i_1, \dots, g_{m-1}, i_{m-1}) * (h_2, j_2, \dots, j_n)$

falls $i_m = j_1$ und $g_m h_1 = 1$

(in Schritt (c) steckt also eine Rekursion)

Klar: das leere Wort ist ein Neutralelement dieser Verknüpfung und

$(g_m^{-1}, i_m, \ldots, g_1^{-1}, i_1)$ ist Rechts- und Linksinverses

zu $(g_1, i_1, \ldots, g_m, i_m)$.

Das Assoziativgesetz ist wegen der Fallunterscheidungen mühsam. Wir umgehen diese Rechnung durch Betrachtung einer geeigneten Wirkung:

Sei $j \in I$, $g \in G_j$. Wir definieren eine Abbildung

$$L_{(g,j)} : W \to W$$

durch $L_{(g,j)} = \mathrm{id}_W$ wenn $g = 1$ sowie

$$L_{(g,j)}(g_1, \ldots, i_m) = \begin{cases} (gg_1, i_1, \ldots, i_m) & \text{wenn } i_1 = j \text{ und } gg_1 \neq 1 \\ (g_2, i_2, \ldots, i_m) & \text{wenn } i_1 = j \text{ und } gg_1 = 1 \\ (g, j, g_1, i_1, \ldots, i_m) & \text{wenn } i_1 \neq j \end{cases}$$

Für $h \in G_j$ gilt dann

$$L_{(g,j)} \circ L_{(h,j)} = L_{(gh,j)}$$

(das muss man nachrechnen ...)

also $L_{(g,j)} \in \mathrm{Sym}(W)$

Weiter sei $L_{()} = \mathrm{id}_{\mathcal{W}}$. Für $w = (g_1, i_1, \ldots, i_m) \in \mathcal{W}$

setze $L_w = L_{(g_1, i_1)} \circ L_{(g_2, i_2)} \circ \ldots \circ L_{(g_m, i_m)}$

es folgt für $w, v \in \mathcal{W}$, dass $L_w \circ L_v = L_{w * v}$

[Verknüpfung von eben

Weiter ist $L_w() = w$ (klar). Sei

$$G = \langle \{ L_w \mid w \in \mathcal{W} \} \rangle \leq \mathrm{Sym}(\mathcal{W})$$

Die Wirkung $G \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ ist also transitiv (wegen $L_w() = w$ für alle $w \in \mathcal{W}$) und es gilt wegen $L_v \circ L_w = L_{v * w}$, dass $G = \{ L_w \mid w \in \mathcal{W} \}$.

Der Stabilisator von $()$ ist damit $\{ L_{()} \} = \{ \mathrm{id}_{\mathcal{W}} \}$.

Da nach §1.? alle Stabilisatoren einer transitiven Wirkung konjugiert sind, wirkt G <u>frei</u> auf $\mathcal{W}$ und die Abbildung $\mathcal{W} \to G$, $w \mapsto L_w$ ist ein Isomorphismus, $w * v \mapsto L_w \circ L_v$. Also ist $(\mathcal{W}, *)$ eine Gruppe.

Man schreibt $\mathop{\ast}\limits_{i \in I} G_i = \mathcal{W}$

und nennt diese Gruppe das <u>Koprodukt</u> oder <u>freie Produkt</u> der Familie $(G_i)_{i\in I}$.

Außerdem schreibt man kurz

$$g_1 g_2 \cdots g_m = (g_1, i_1, \dots, g_m, i_m)$$

$$\mathbb{1} = ()$$

← Achtung: hier werden also die i_k unterschlagen!

und lässt das Sternchen $*$ weg.

<u>Beispiel</u> $I = \{1,2\}$ $\quad G_1 = \{1,a\}$ $\quad a^2 = 1$

$G_2 = \{1,b\}$ $\quad b^2 = 1$

$$G_1 * G_2 = \{\underbrace{1, a, b, ab, ba, aba, bab, \dots}_{\text{unendlich viele reduzierte Worte!}}\}$$

<u>Lemma</u> Ist $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen und gibt es $i,j \in I$, $i \neq j$, mit $G_i \neq \{1\} \neq G_j$ (mindestens zwei der G_i nicht trivial), so ist das Koprodukt $\underset{i\in I}{*} G_i$ unendlich.

<u>Beweis</u> ÜA $\square$

4. Def Sei weiterhin $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Für jedes $j \in I$ definiere wir einen Homomorphismus

$$\iota_j : G_j \longrightarrow \ast_{i\in I} G_i \qquad \iota_j(1) = (\ ) \in W$$
$$\iota_j(g) = (g,j) \in W \quad \text{wenn } g \neq 1$$
$$= g$$

griechisch Iota

Offensichtlich ist ι_j ein Homomorphismus und injektiv.

Satz (Universelle Eigenschaft des Koproduktes)
Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, sei $\ast_{i\in I} G_i$ das Koprodukt, sei $\iota_j : G_j \to \ast_{i\in I} G_i$ wie eben definiert.
Sei H eine Gruppe, seien $\varphi_j : G_j \to H$ Homomorphismen für alle $j \in I$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : \ast_{i\in I} G_i \to H$ mit $\varphi \circ \iota_j = \varphi_j$ für alle $j \in I$.

Diese Universelle Eigenschaft charakterisiert das Koprodukt bis auf Isomorphie

Beis. Für $(g_1, i_1, \dots, g_r, i_r) \in \mathcal{W}$ definiere

$\varphi(g_1, i_1, \dots, i_r) = \varphi_{i_1}(g_1) \cdots \varphi_{i_r}(g_r)$ $\leadsto$ φ ist

Homomorphismus (nach Definition von $*$ klar).

Ist $\varphi' : \ast_{i \in I} G \to H$ ein weiterer solcher Homomorphismus,

so folgt $\quad \varphi'(\underbrace{(g,j)}_{\in \mathcal{W}}) = \varphi'(\iota_j(g)) = \varphi_j(g)$

$$\Rightarrow \varphi'((g_1, i_1, \dots, i_r)) = \varphi'((g_1, i_1) * (g_2, i_2) * \dots * (g_r, i_r))$$

$$= \varphi((g_1, i_1, \dots, i_r)) \quad \text{also } \varphi' = \varphi.$$

Anmerkung: D ist eine weitere Gruppe mit der univ. Eigenschaft, für Homomorphismen $\delta_j : G_j \to D$.

Betrachte

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, shift left] & \ast_{i \in I} G_i \arrow[l, shift left] \\ G_j \arrow[u, "\delta_j"] \arrow[r, equal] & G_j \arrow[u, "\iota_j"'] \end{tikzcd}$$

Wieder existieren $\rightarrow$, $\rightarrow$, sowie $\rightarrow \rightarrow$

und $\rightarrow \rightarrow$ eindeutig, also $\rightarrow \rightarrow = \mathrm{id}_D$

und $\rightarrow \rightarrow = \mathrm{id}_{\ast_{i \in I} G_i}$

$\square$

Ein wichtiger Spezialfall sind freie Gruppen.

5. Def. Sei X eine nicht leere Menge. Sei $(G_x)_{x\in X}$ die Familie $G_x = \mathbb{Z}$. Die <u>freie Gruppe über X</u> ist

$$F(X) = \mathop{\ast}_{x\in X} \mathbb{Z}$$

<u>Konventionen.</u> Man schreibt für $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $x \in X$ $\underbrace{(k, x)}_{\in W} = x^k$

sowie für $k = 1$ $(1, x) = x^1 = x$ und $() = 1 = x^0$

Die nicht leeren reduzierten Wörter in W werden also geschrieben als

$$(k_1, x_1, k_2, x_2, \dots, x_r) = \underline{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}}$$

$$k_i \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad , x_i \in X \qquad x_{i+1} \neq x_i$$

Die Abbildung $X \to F(X)$, $x \longmapsto x = x^1 = (1, x)$ ist also injektiv und <u>wir fassen X als Teilmenge von $F(X)$ auf.</u>

Wir definieren $F(\phi) = \{1\}$

Damit ordnen wir jeder Menge X eine Gruppe $F(X)$ zu. Auch diese Zuordnung hat universelle Eigenschaften. #

6. Satz (i) Seien X, Y Mengen und $\lambda: X \to Y$ eine Abbildung. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $F(\lambda): F(X) \to F(Y)$, der λ fortsetzt.

(i') Für $X \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{\mu} Z$ gilt $F(\mu \circ \lambda) = F(\mu) \circ F(\lambda)$, und $F(id_X) = id_{F(X)}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ F(X) \arrow[r] & F(Y) \end{tikzcd}$$

⌈ Kurz gesagt: $X \to F(X)$ ist ein Funktor von der Kategorie Set der Mengen und Abbildungen in die Kategorie Grp der Gruppen und Homomorphismen ⌋

(ii) Ist X eine Menge, G eine Gruppe, $\lambda: X \to G$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $F(\lambda): F(X) \to G$, der λ fortsetzt.

Beweis: Zuerst (ii). Für $x \in X$ betrachte $\lambda_x: \mathbb{Z} \to G$, $k \mapsto \lambda(x)^k$. Aus der univ. Eigenschaft des Koprodukts erhalten wir $F(X) = \mathop{*}_{x \in X} \mathbb{Z} \xrightarrow{F(\lambda)} G$. Ist

$\varphi: F(X) \to G$ ein Homomorphismus mit $\varphi(x) = \lambda(x)$ für alle $x \in X$, so folgt $\varphi(x^k) = \lambda(x)^k = F(\lambda)(x^k)$, also $\varphi = F(\lambda)$.

(Für $X = \emptyset$ ist die Behauptung klar)

(i) Mit (ii) erhalten wir aus $X \to Y \hookrightarrow F(Y)$ einen eindeutigen Homomorphismus $F(\lambda): F(X) \to F(Y)$, der $F(\lambda)(x) = \lambda(y)$ erfüllt. Die restlichen Behauptungen sind klar nach Konstruktion. $\square$

<u>Folgerung</u>: Ist $\#X = \#Y$, so gilt $F(X) \cong F(Y)$. Wir werden bald die Umkehrung zeigen.

<u>Bsp</u>
- $X = \{a\}$ $\quad \underset{F_1}{\overset{\|}{F(X)}} \cong \mathbb{Z}$ klar nach Konstruktion
- $X = \{a,b\}$ $a \neq b$ Die freie Gruppe $F_2 = F(\{a,b\})$ besteht aus allen reduzierten Wörtern in $\{a,b\}$
- Allgemein für $X = \{a_1, \dots, a_m\}$ mit $\#X = m$ schreibt man $F_m = F(\{a_1, \dots, a_m\})$, die <u>freie Gruppe vom Rang m</u>

7. Ein Grund, sich mit freien Gruppen zu beschäftigen, ist folgendes Ergebnis.

<u>Satz</u> Jede Gruppe G ist Quotient einer geeigneten freien Gruppe. Genauer: ist $A \subseteq G$ ein Erzeugendensystem, so gibt es einen Epimorphismus $F(A) \to G$

Folglich ist jede endlich erzeugte Gruppe Quotient einer freien Gruppe von endlichem Rang.

<u>Beweis</u> Klar mit der Inklusion $A \hookrightarrow G$ und § 2.6 (ii). $\square$

8. <u>Erinnerung: Die Kommutatorgruppe</u> Für $a, b \in G$ sei $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = ab(ba)^{-1}$ der <u>Kommutator</u>. Die Kommutatorgruppe von G ist

$$DG = \langle \{ [a,b] \mid a,b \in G \} \rangle$$

⌈Das Produkt von Kommutatoren ist i.a. <u>kein</u> Kommutator. Deswegen muss man das Erzeugnis betrachten. Es gilt aber $[a,b]^{-1} = [b,a]$ sowie $g[a,b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ ⌋#

Es gilt: (i) $DG \trianglelefteq G$

(ii) $DG = \{1\} \iff G$ ist abelsch

(iii) G/DG ist abelsch

(iv) Ist A abelsch, $G \xrightarrow{\varphi} A$ ein Homomorphismus, so gilt $DG \subseteq \ker(\varphi)$, man erhält also mit dem Homomorphiesatz

$$G/DG \xrightarrow{\overline{\varphi}} A$$

<u>Denn</u>: (i) klar aus der vorigen

(ii) G abelsch $\Leftrightarrow$ $ab = ba$ für alle $a,b \in G$ $\Leftrightarrow$ $[a,b] = 1$ für alle $a,b \in G$ $\Leftrightarrow$ $DG = \{1\}$

(iii) G/DG ist abelsch nach (ii), denn $ab = ba \mod DG$ für alle $a,b \in G$ ($ab = [a,b]ba$)

(iv) Es folgt $\varphi([a,b]) = 1$ für alle $a,b \in G$, also $DG \subseteq \ker(\varphi)$ □

Man schreibt $G_{ab} = G/DG$ (<u>Abelisierung</u> von G, 1. Homologiegruppe von G)

Wir brauchen jetzt $F(X)_{ab}$, die Abelisierung der freien Gruppe $F(X)$.

9. <u>Lemma</u> Sei H eine abelsche Gruppe, sei X eine Menge, sei $X \xrightarrow{\lambda} H$ eine Abbildung. Dann gibt es genau einen Homomorphismus

$$F(X)_{ab} \xrightarrow{FA(\lambda)} H$$

mit $FA(\lambda)(\bar{x}) = \lambda(x)$ für alle $x \in X$, wobei $\bar{x}$ das Bild von x in $F(X)_{ab} = F(X)/DF(X)$ ist.

<u>Beweis</u> Zunächst gibt es eindeutig

$$F(\lambda): F(X) \to H \quad \text{mit } F(\lambda)(x) = \lambda(x)$$

für alle $x \in X$ nach §2.6.

Da H abelsch ist, faktorisiert $F(\lambda)$ durch $F(X) \to F(X)_{ab}$, also

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(\lambda)"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & F(X)_{ab} \arrow[ur, "FA(\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

und nach dem Homomorphiesatz ist $FA(\lambda)$ durch die Bedingung $F(\lambda)(g) = FA(\lambda)(\pi(g))$ eindeutig bestimmt. Da X ein Erzeugendensystem für $F(X)$ ist, ist $FA(\lambda)$ schon durch $F(\lambda)(x) = FA(\lambda)(\bar{x})$ $\quad (\bar{x} = \pi(x))$ eindeutig bestimmt. $\square$

Wir konstruieren jetzt eine zweite abelsche Gruppe aus X und überlegen, dass sie zu $F(X)_{ab}$ isomorph ist.

10. <u>Freie abelsche Gruppen</u> Sei X eine nicht leere Menge. Dann ist die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{Z}$ eine Gruppe bezüglich punktweiser Addition. Für $x \in X$ sei $\hat{x} : X \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $\hat{x}(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wir setzen $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} = \langle \{ \hat{x} \mid x \in X \} \rangle =: FA(X)$ die <u>freie abelsche Gruppe über X</u>. Äquivalente Beschreibung:

$$FA(X) = \{ \xi : X \to \mathbb{Z} \mid \xi(x) = 0 \ \underbrace{\text{für fast alle}}_{\text{bis auf endlich viele Ausnahmen}} \ x \in X \}$$

Via $x \mapsto \hat{x}$ fassen wir X als Teilmenge von $FA(X)$ auf.

Für $X = \emptyset$ setzen wir $FA(X) = \{0\}$ (triviale Gruppe)

Jedes $\xi \in FA(X)$ hat eindeutige Darstellung als Linearkombination $\xi = \sum_{x \in X} \hat{x}\, \xi_x$ $\quad \xi_x \in \mathbb{Z}$, $\xi_x = 0$ für fast alle $x \in X$

denn: $\xi = \sum_{x \in X} \hat{x}\, \xi_x = \sum_{y \in X} \hat{y}\, \eta_y \Rightarrow$ für jedes $z \in X$

gilt $\xi(z) = \xi_z = \eta_z$. Via $x \mapsto \hat{x}$ fassen wir X als Teilmenge von $FA(X)$ auf.

11. Universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe $FA(X)$

Ist X eine Menge, H eine abelsche Gruppe, $\lambda: X \to H$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $FA(\lambda): FA(X) \to H$, der λ fortsetzt.

__Beweis__ Für $\xi = \sum_{x \in X} \hat{x}\, \xi_x \in FA(X)$ definiere

$FA(\lambda)(\xi) = \lambda(x)^{\xi_x}$, das ist ein Homomorphismus.

Ist $\varphi: FA(X) \to H$ ein weiterer Homomorphismus, der λ fortsetzt, so folgt $\varphi = FA(\lambda)$, denn

$$\varphi(x) = \lambda(x) = FA(\lambda)(x) \text{ gilt für alle } x \in X,$$

und $X \subseteq FA(X)$ erzeugt $FA(X)$, also $\varphi = FA(\lambda)$ $\square$

12. Korollar Sei X eine Menge. Dann induziert die durch

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & F(X) \\ FA(X) & \end{tikzcd}$$

induzierte Homomorphismus $F(X) \to FA(X)$ einen Isomorphismus

$$FA(X) \cong F(X)_{ab}$$

mit $\bar{x} \mapsto \hat{x}$, wobei $\bar{x} \in F(X)_{ab}$ das Bild von $x \in X \subseteq F(X)$ in $F(X)_{ab}$ ist.

__Beweis:__ Wir erhalten aus §2.9 eindeutig

$$F(X)_{ab} \xrightarrow{\alpha} FA(X) \quad \text{mit } \alpha(\bar{x}) = \hat{x}$$

Definiere nun $\lambda : X \to F(X)_{ab}$, $x \mapsto \bar{x}$. Nach §2.10 erhalten wir eine eindeutige Fortsetzung $\beta : FA(X) \to F(X)_{ab}$ mit $\beta(\hat{x}) = \bar{x}$. Für alle $x \in X$ gilt also

$$\beta \circ \alpha(\bar{x}) = \bar{x} \qquad \alpha \circ \beta(\hat{x}) = \hat{x}$$

Da X sowohl $FA(X)$ als auch $F(X)_{ab}$ erzeugt, folgt $\beta \circ \alpha = id_{F(X)_{ab}}$ $\quad \alpha \circ \beta = id_{FA(X)}$ $\square$

13 **Satz** Seien X, Y Mengen. Dann sind äquivalent: (i) $\#X = \#Y$

(ii) $FA(X) \cong FA(Y)$

(iii) $F(X) \cong F(Y)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) nach §2.6

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $F(X) \cong F(Y) \Rightarrow F(X)_{ab} \cong F(Y)_{ab}$

$\overset{\S 2.12}{\Rightarrow} FA(X) \cong FA(Y)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $(H,+)$ eine abelsche Gruppe, $k \in \mathbb{Z}$, so ist $kH = \{kh \mid h \in H\} \subseteq H$ eine Untergruppe.

Betrachte $2 \cdot FA(X) = \{\xi \in FA(X) \mid \xi_x \in 2 \cdot \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in X\}$

Es folgt: $FA(X) / 2 \cdot FA(X) \cong \{\xi : X \to \mathbb{Z}/2 \mid \xi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in X\}$ ist Vektorraum über $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ mit Basis

$\left\{ \hat{x} : y \longmapsto \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \;\middle|\; x \in X \right\}$, also mit Dimension $\#X$. Also

$FA(X) \cong FA(Y) \Rightarrow FA(X) / 2FA(X) \cong FA(Y) / 2 \cdot FA(Y)$

$\Rightarrow \#X = \#Y$ $\square$

Bem Ist $Y \subseteq X$, so erhalten wir einen Monomorphismus $F(Y) \to F(X)$, denn: für $Y = \emptyset$ ist das klar, sonst definiere $r: X \to Y$

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \in Y \\ y & \text{wenn } x \notin Y \end{cases} \qquad \text{für } y \in Y \text{ fest gewählt}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, equal] & X \arrow[d, "r"] \\ & Y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[dr, equal] & F(X) \arrow[d, "F(r)"] \\ & F(Y) \end{tikzcd}$$

also ist $F(i)$ injektiv.

Insbesondere haben wir Monomorphismen

$$F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to \dots$$

Wir werden später sehen: für jedes $n \geq 0$ gibt es (viele) Monomorphismen $F_n \to F_2$! ▽ #

Ist G eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \subseteq G$, so erhält man aus den Inklusionen $A \hookrightarrow G$, $B \hookrightarrow G$ nach §2.4 einen Homomorphismus $A * B \to G$.

Das "Ping-Pong-Lemma" gibt ein Kriterium, wann das ein Isomorphismus ist.

14. Satz (Ping-Pong-Lemma)

Sei G eine Gruppe, seien $A, B \le G$ Untergruppen mit:

(i) $G = \langle A \cup B \rangle$

(ii) $\# A \geq 2$ und $\# B \geq 3$

Angenommen, G wirkt auf eine Menge X und $\emptyset \neq P, Q \subseteq X$ sind Teilmengen mit $Q \not\subseteq P$.

Falls gilt: $a \in A - \{1\} \Rightarrow a(Q) \subseteq P$

und $b \in B - \{1\} \Rightarrow b(P) \subseteq Q$

so ist die kanonische Abbildung

$$\varphi : A * B \to G$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Das Bild von $A * B \xrightarrow{\varphi} G$ enthält A und B, also ist φ surjektiv.

Sei $w \in \mathcal{W}$ ein reduziertes Wort mit $\varphi(w) = 1$.

Zu zeigen: $w = (\,)$.

1. Fall $w = a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_s$ $\quad a_i \in A - \{1\}$, $b_j \in B - \{1\}$

Es folgt $\varphi(w)(Q) \subseteq P$. Wegen $Q \not\subseteq P$ ist $\varphi(w) \neq 1$.

2. Fall $w = b_1 a_1 \cdots b_s$. Wähle $a \in A - \{1\}$,

nach Fall 1 gilt $\varphi(a w a^{-1}) \neq 1$, also $\varphi(w) \neq 1$

3. Fall $w = a_1 b_1 \cdots b_s$, wähle $b \in B - \{1, b_s\}$

$\varphi(b w b^{-1}) \neq 1$ nach 2. Fall, also $\varphi(w) \neq 1$

4. Fall $w = b_1 a_1 \cdots b_s a_s$, wähle $b \in B - \{1, b_1\}$

$\Rightarrow \varphi(b^{-1} w b) \neq 1$ nach 2. Fall, also $\varphi(w) \neq 1$

$\square$

15. Eine Anwendung des Ping-Pong Lemmas: die Gruppe $PSL_2\mathbb{Z}$

$$SL_2\mathbb{Z} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{=X} \;\Big|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z},\ \underbrace{\alpha\delta - \gamma\beta}_{\det(X)} = 1 \Big\}$$

Das ist eine Gruppe, $X^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, $\det(X)\det(Y) = \det(XY)$

Setze $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lemma A Es gilt $\langle \{a, b\} \rangle = SL_2\mathbb{Z}$

Beweis Sei $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2\mathbb{Z}$

1. Fall $\gamma = 0 \leadsto \alpha\delta = 1 \leadsto \alpha = \delta = \pm 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b^{\beta} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=a^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=b^{-\beta}} \qquad (\checkmark)$$

2. Fall $|\alpha| = |\gamma| \leadsto \gamma \neq 0$

$\underline{\alpha = \gamma}$ $\Rightarrow aba\,g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \langle\{a,b\}\rangle$

$\underline{\alpha = -\gamma}$ $\Rightarrow a^{-1} b\, g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \langle\{a,b\}\rangle$

3. Fall $\alpha = 0$

$$ag = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \langle\{a,b\}\rangle$$

4. Fall $0 < |\alpha| < |\gamma|$

$$ag = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \leadsto \text{Fall } |\alpha| > |\gamma| > 0$$

5. Fall $0 < |\gamma| < |\alpha|$, $\alpha = \lambda \cdot \gamma + \mu$ mit $0 < \mu \leq |\gamma|$

$$b^{-\lambda} g = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & * \\ \gamma & * \end{pmatrix}$$

Wenn $|\mu| = |\gamma| \to$ Fall 2

Wenn $|\mu| < |\gamma| \to$ Fall 4 $\to$ Fall 5 mit betr.mäßig echt kleinen Eintrag links oben, das passiert nur endlich oft $\leadsto$ einer der bekannten Fälle $\square$

Betrachte jetzt die Wirkung von $SL_2\mathbb{Z}$ auf

$\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch Möbiustransformation

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad \frac{1}{\infty} = 0 \,, \quad x + \infty = \infty \text{ etc}$$

oder alternativ: $\mathbb{R}P^1 = \{ U \leq \mathbb{R}^2 \mid U \text{ 1-dim. Unterraum} \}$

$$\mathbb{R} \ni x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R}$$

$$\infty \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathbb{R}$$

<u>Lemma</u> Der Kern dieser Wirkung ist $K = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leq SL_2\mathbb{Z}$

<u>Beweis</u> $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}(x) = x \iff \alpha x + \beta = \gamma x^2 + \delta x$

wenn das für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta$ $\square$

Man setzt $PSL_2\mathbb{Z} = SL_2\mathbb{Z}/K$. Für $g \in SL_2\mathbb{Z}$

sei $\bar{g} \in PSL_2\mathbb{Z}$ das Bild, $\bar{g} = \{\pm g\}$

Wir setzen nun $A = \langle \{\bar{a}\} \rangle \leq PSL_2\mathbb{Z}$

$B = \langle \{\overline{ab}\} \rangle \leq PSL_2\mathbb{Z}$

$a^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow \bar{a} = \bar{\mathbb{1}}$ in $PSL_2\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow A \cong \mathbb{Z}/2$

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ab^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ab)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

also $B \cong \mathbb{Z}/3$

Sei jetzt $X = \mathbb{R}P^1$, $P = \mathbb{R}_{>0}$, $Q = \mathbb{R}_{<0}$

Es gilt $\overline{ab}(x) = \frac{-1}{x+1}$ $\overline{ab}^2(x) = \frac{-x-1}{1}$

also $\overline{ab}(P) \subseteq Q$ $\overline{ab}^2(P) \subseteq Q$

$\bar{a}(x) = \frac{-1}{x}$ also $\bar{a}(Q) \subseteq P$. Mit dem Ping-Pong Lemma folgt:

$$PSL_2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$$

16. <u>Korollar</u> (zum Ping-Pong-Lemma)

Sei $G \times X \to X$ eine Wirkung, seien $a, b \in G$.
Angenommen, $P, Q \subseteq X$ sind Teilmengen mit $P \nsubseteq Q \nsubseteq P$ und für jedes $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ gilt

$$a^n(Q) \subseteq P \qquad b^n(P) \subseteq Q$$

Dann ist der kanonische Homomorphismus

$$F(\{a,b\}) \to G, \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto b$$

ein ~~Isomorphismus~~ Monomorphismus und G enthält eine zu F_2 isomorphe Untergruppe, $\langle \{a,b\} \rangle \cong F_2$.

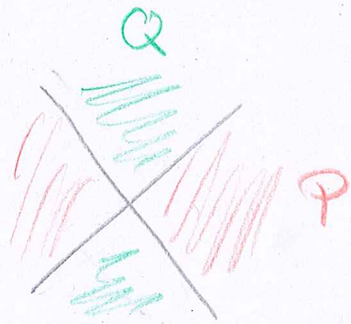
Beweis Es folgt zunächst $a^n \neq 1 \neq b^n$ für alle $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, also $\langle\{a\}\rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle\{b\}\rangle$. Setze jetzt $A = \langle\{a\}\rangle$, $B = \langle\{b\}\rangle$ sowie $H = \langle A \cup B\rangle$ und wende §2.14 an. Wir erhalten einen Isomorphismus $A * B \to H \leq G$ wie gewünscht. $\square$

17. Bsp $G = SL_2\mathbb{Z}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Matrix wirkt

$P = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \}$

$Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y| \}$



$a^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |x| < |y| \Rightarrow |x + 2ky| \geq 2|k||y| - |x|$

$> |y|$ wenn $k \neq 0$

entsprechend für b^k $\quad \Rightarrow a^k(Q) \subseteq P$

also $\langle\{a,b\}\rangle \cong F_2$ $\square$