9. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 9.1
Sei E ein topologischer Raum und G eine Gruppe, die durch Homöomorphismen auf E wirkt, d.h. für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $x \mapsto g(x)$ ein Homöomorphismus. Weiter gelte die Bedingung:

($*$) Für alle $x \in E$ existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $gU_x \cap U_x = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$.

Sei $X := E/G$ der Quotientenraum von E bzgl. der Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : g(x) = y$$

und $p : E \to X, x \mapsto [x]$ die Quotientenabbildung.
Zeige, dass p eine Überlagerung ist.

Lösung: Sei $[x] \in X$ beliebig. Nach ($*$) existiert eine offene Umgebung U_x von x mit $gU_x \cap U_x = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$. Sei $V := p(U_x) \subseteq X$.
Behauptung: V ist offen in X und das Urbild $p^{-1}(U)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen, auf welchen die Einschränkung von p ein Homöomorphismus ist.
Beweis: Um zu zeigen, dass V offen ist, genügt es nach Definition der Quotiententopologie auf $X = E/G$ zu zeigen, dass $p^{-1}(V)$ offen in E ist.
Dafür beweisen wir $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{g \in G} gU_x$.
Ist $\tilde{x} \in p^{-1}(V)$, so gilt $[\tilde{x}] = p(\tilde{x}) \in V = p(U_x)$. Also existiert $\tilde{y} \in U_x$ mit $[\tilde{x}] = p(\tilde{y}) = [\tilde{y}]$. Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ gibt es daher $g \in G$ mit $\tilde{x} = g(\tilde{y})$, d.h. es gilt $\tilde{x} \in gU_x$.
Ist umgekehrt $\tilde{x} \in \bigcup\limits_{g \in G} gU_x$, so existiert ein $g \in G, \tilde{y} \in U_x$ mit $\tilde{x} = g(\tilde{y})$. Folglich gilt $p(\tilde{x}) = [\tilde{x}] = [g(\tilde{y})] = [\tilde{y}] = p(\tilde{y}) \in p(U_x) = V$, d.h. $\tilde{x} \in p^{-1}(V)$.
Da G durch Homöomorphismen wirkt und U_x offen in E ist, ist gU_x offen in E für jedes $g \in G$. Folglich ist $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{g \in G} gU_x$ als Vereinigung offener Mengen offen.
Weiter sind gU_x und hU_x für $g, h \in G, g \neq h$ disjunkt. Denn es gilt mit ($*$):

$$gU_x \cap hU_x = h(h^{-1}gU_x \cap U_x) = h(\emptyset) = \emptyset$$

Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $g \in G$ die Einschränkung $p|_{gU_x} : gU_x \to V$ ein Homöomorphismus ist.
stetig: Die Abbildung p ist nach Definition der Quotiententopologie stetig. Als Einschränkung einer stetigen Abbildung ist damit auch $p|_{gU_x}$ stetig.

injektiv: Seien $y, z \in gU_x$ mit $p(y) = p(z)$, d.h. $[y] = [z]$. Dann existiert $h \in G$ mit $h(y) = z$. Also gilt $hgU_x \cap gU_x \neq \emptyset$ und folglich $hg = h$, d.h. $h = 1$. Somit gilt $y = z$ und $p|_{gU_x}$ ist injektiv.
surjektiv: Sei $[z] \in V$ mit $z \in U_x$ beliebig. Dann gilt für $g(z) \in gU_x$:

$$p(g(z)) = [g(z)] = [z]$$

Daher ist $p|_{gU_x}$ surjektiv.
offen: Sei $W \subseteq gU_x$ offen. Zu zeigen: $p(W)$ ist offen in V.
Es genügt dafür wieder zu beweisen, dass das Urbild $p^{-1}(p(W))$ offen in E ist.
Genau wie oben lässt sich zeigen, dass $p^{-1}(p(W)) = \bigcup_{h \in G} hW$ gilt.
Da W offen in gU_x und gU_x offen in E ist, ist W offen in E und $p^{-1}(p(W))$ ist als Vereinigung offener Mengen offen.
Insgesamt ist $p|_{gU_x}$ eine stetige, bijektive, offene Abbildung und daher ein Homöomorphismus.
Nach Definition ist p somit eine Überlagerung.

Aufgabe 9.2
Seien E_1, E_2 topologische Räume und G_1, G_2 Gruppen, sodass G_i durch Homöomorphismen auf E_i wirkt ($i = 1, 2$). Weiter erfüllen beide Wirkungen die Bedingung $(*)$ aus Aufgabe 9.1. Zeige:

a) Durch $(g_1, g_2)(x_1, x_2) := (g_1(x_1), g_2(x_2))$ für $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, x_1 \in E_1$ und $x_2 \in E_2$ wird eine Wirkung durch Homöomorphismen von $G_1 \times G_2$ auf $E_1 \times E_2$ erklärt, welche die Bedingung $(*)$ erfüllt.

b) Der Quotient $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$ ist homöomorph zum Produktraum $E_1/G_1 \times E_2/G_2$.

Lösung:

a) Zuerst rechnen wir nach, dass es sich um eine Gruppenwirkung handelt. Es gilt für beliebige $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$:

$$1_{G_1 \times G_2}(x_1, x_2) = (1_{G_1}, 1_{G_2})(x_1, x_2) = (1_{G_1}(x_1), 1_{G_2}(x_2)) = (x_1, x_2)$$

Seien nun $g_1, h_1 \in G_1, g_2, h_2 \in G_2$ und $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ beliebig. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}(g_1, g_2)((h_1, h_2)(x_1, x_2)) &= (g_1, g_2)(h_1(x_1), h_2(x_2)) = (g_1(h_1(x_1)), g_2(h_2(x_2))) \\ &= (g_1 h_1(x_1), g_2 h_2(x_2)) = (g_1 h_1, g_2 h_2)(x_1, x_2) \\ &= ((g_1, g_2)(h_1, h_2))(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Es liegt also eine Gruppenwirkung von $G_1 \times G_2$ auf $E_1 \times E_2$ vor.
Seien $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ beliebig. Da die Abbildungen $g_1 : E_1 \to E_1$, $x \mapsto g_1(x)$ und $g_2 : E_2 \mapsto E_2, x \mapsto g_2(x)$ stetig sind, ist die Abbildung $g_1 \times g_2 : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2, (x_1, x_2) \mapsto (g_1(x_1), g_2(x_2))$ stetig. Weiter ist $g_1 \times g_2$ bijektiv mit der stetigen Umkehrabbildung $g_1^{-1} \times g_2^{-1}$, d.h. $g_1 \times g_2$ ist ein Homöomorphismus von $E_1 \times E_2$. $G_1 \times G_2$ wirkt daher auf $E_1 \times E_2$

durch Homöomorphismen.
(Anmerkung: Das vorhergehende Argument zeigt allgemein, dass jede Wirkung durch stetige Abbildungen schon eine Wirkung durch Homöomorphismen ist.)
Es bleibt zu zeigen, dass die Wirkung die Bedingung $(*)$ erfüllt.
Sei also $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ beliebig. Da die Wirkungen von G_i auf E_i für $i = 1, 2$ die Bedingung $(*)$ erfüllen, existieren offene Mengen $U_{x_1} \subseteq E_1$, $U_{x_2} \subseteq E_2$ mit $x_1 \in U_{x_1}, x_2 \in U_{x_2}$ sowie $g_1 U_{x_1} \cap U_{x_1} = \emptyset$ für alle $g_1 \in G_1 \setminus \{1_{G_1}\}$ und $g_2 U_{x_2} \cap U_{x_2} = \emptyset$ für alle $g_2 \in G_2 \setminus \{1_{G_2}\}$.
Setze $U_{(x_1,x_2)} := U_{x_1} \times U_{x_2}$. Dann ist $U_{(x_1,x_2)}$ offen in $E_1 \times E_2$.
Sei weiter $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ mit $(g_1, g_2)U_{(x_1,x_2)} \cap U_{(x_1,x_2)} \neq \emptyset$. Es gilt:

$$\begin{aligned}(g_1, g_2)U_{(x_1,x_2)} \cap U_{(x_1,x_2)} &= ((g_1, g_2)U_{x_1} \times U_{x_2}) \cap (U_{x_1} \times U_{x_2}) \\ &= (g_1 U_{x_1} \times g_2 U_{x_2}) \cap (U_{x_1} \times U_{x_2}) \\ &= (g_1 U_{x_1} \cap U_{x_1}) \times (g_2 U_{x_2} \cap U_{x_2})\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $g_1 U_{x_1} \cap U_{x_1} \neq \emptyset$, also $g_1 = 1_{G_1}$. Genauso folgt $g_2 = 1_{G_2}$, d.h. $(g_1, g_2) = (1_{G_1}, 1_{G_2}) = 1_{G_1 \times G_2}$.
Folglich ist $U_{(x_1,x_2)}$ eine offene Umgebung von (x_1, x_2) mit

$$(g_1, g_2)U_{(x_1,x_2)} \cap U_{(x_1,x_2)} = \emptyset$$

für alle $(g_1, g_2) \in (G_1 \times G_2) \setminus \{1_{G_1 \times G_2}\}$.
Da $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ beliebig war, erfüllt die Wirkung von $G_1 \times G_2$ auf $E_1 \times E_2$ die Bedingung $(*)$.

b) Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned}&\varphi : (E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2) \to E_1/G_1 \times E_2/G_2, [(x_1, x_2)] \mapsto ([x_1], [x_2]) \\ &\psi : E_1/G_1 \times E_2/G_2 \to (E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2), ([x_1], [x_2]) \mapsto [(x_1, x_2)].\end{aligned}$$

Behauptung: φ und ψ sind wohldefiniert und stetig.
Beweis: Seien $x_1, y_1 \in X_1, x_2, y_2 \in X_2$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}[(x_1, x_2)] = [(y_1, y_2)] &\Leftrightarrow \exists (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1, g_2)(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow (\exists g_1 \in G_1 : g_1(x_1) = y_1) \wedge (\exists g_2 \in G_2 : g_2(x_2) = y_2) \\ &\Leftrightarrow [x_1] = [y_1] \wedge [x_2] = [y_2]\end{aligned}$$

Von links nach rechts gelesen bedeutet dies, dass die Abbildung φ wohldefiniert ist. Umgekehrt heißt es von rechts nach links gelesen, dass ψ wohldefiniert ist.
Seien $p : E_1 \times E_2 \to (E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2), p_1 : E_1 \to E_1/G_1$ und $p_2 : E_2 \to E_2/G_2$ die jeweiligen Quotientenabbildungen. Nach Definition der Quotiententopologie sind p, p_1 und p_2 stetig. Somit ist auch die Abbildung $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to E_1/G_1 \times E_2/G_2$ stetig. Weiter gilt nach Konstruktion $p_1 \times p_2 = \varphi \circ p$.
Daraus folgt, dass φ stetig ist: Sei $U \subseteq E_1/G_1 \times E_2/G_2$ offen. Dann ist $p^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = (\varphi \circ p)^{-1}(U) = (p_1 \times p_2)^{-1}(U)$ offen in $E_1 \times E_2$, da $p_1 \times p_2$ stetig ist. Da das Urbild $p^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ offen in $E_1 \times E_2$ ist, ist $\varphi^{-1}(U)$ nach Definition der Quotiententopologie offen in $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$. Damit ist φ stetig.

Desweiteren gilt $\psi \circ (p_1 \times p_2) = p$. Dies nutzen wir, um zu zeigen, dass ψ stetig ist.
Sei $U \subseteq (E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$ offen und $([x_1], [x_2]) \in \psi^{-1}(U)$ beliebig. Dann gilt:

$$p(x_1, x_2) = \psi \circ (p_1 \times p_2)(x_1, x_2) = \psi([x_1], [x_2]) \in U$$

Somit liegt (x_1, x_2) im Urbild $p^{-1}(U)$. Da U offen in $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$ ist, ist dann $p^{-1}(U)$ offen in $E_1 \times E_2$ nach Definition der Quotiententopologie auf $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$. Da die Menge

$$\mathcal{B} = \{W_1 \times W_2 \mid W_1 \subseteq E_1 \text{ offen}, W_2 \subseteq E_2 \text{ offen}\}$$

eine Basis der Produkttopologie auf $E_1 \times E_2$ ist, existieren offene Mengen $V_1 \subseteq E_1, V_2 \subseteq E_2$ mit $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ und $V_1 \times V_2 \subseteq p^{-1}(U)$.
Betrachte die Menge $W := p_1(V_1) \times p_2(V_2) \subseteq E_1/G_1 \times E_2/G_2$. Da p_1 und p_2 nach Aufgabe 9.1 Überlagerungen sind, sind p_1 und p_2 offene Abbildungen. Insbesondere ist $p_i(V_i)$ offen in E_i/G_i für $i = 1, 2$. Somit ist W eine offene Umgebung von $(p_1 \times p_2)(x_1, x_2) = ([x_1], [x_2])$ in $E_1/G_1 \times E_2/G_2$. Sei nun $([y_1], [y_2]) \in W$ mit $y_1 \in V_1, y_2 \in V_2$ beliebig. Dann gilt:

$$\psi([y_1], [y_2]) = \psi \circ (p_1 \times p_2)(y_1, y_2) = p(y_1, y_2) \in U$$

Also gilt $W \subseteq \psi^{-1}(U)$ und da $([x_1], [x_2]) \in \psi^{-1}(U)$ beliebig war, ist $\psi^{-1}(U)$ offen in $E_1/G_1 \times E_2/G_2$. Damit ist ψ stetig.
Offenbar sind φ und ψ invers zueinander und somit Homöomorphismen. Insgesamt ist damit $(E_1 \times E_2)/(G_1 \times G_2)$ homöomorph zu $E_1/G_1 \times E_2/G_2$.

Aufgabe 9.3
Seien E, X wegzusammenhängende topologische Räume, $p \in X$ beliebig und $\varphi : E \to X$ eine Überlagerung.
Für $q \in \varphi^{-1}(p)$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ setzen wir $q^{[\alpha]} := \tilde{\alpha}_q(1)$, wobei $\tilde{\alpha}_q : [0, 1] \to E$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_q(0) = q$ ist. (Dieser eindeutige Lift $\tilde{\alpha}_q$ existiert nach Korollar A zu Satz 10 in Kapitel 5 der Vorlesung.)
Zeige, dass diese Konstruktion von $q^{[\alpha]}$ eine wohldefinierte, transitive Rechtswirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ erklärt.

Lösung: Seien $q \in \varphi^{-1}(p)$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ beliebig. Wir zeigen zunächst, dass die Definition von $q^{[\alpha]}$ nicht vom Repräsentanten der Klasse $[\alpha]$ abhängt.
Sei also β ein Weg von p nach p mit $[\beta] = [\alpha]$.
Dann existiert eine Homotopie *rel* ∂ $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ zwischen α und β, d.h. es gilt $h(0, t) = \alpha(t), h(1, t) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $h(s, 0) = p = h(s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$.
Nach Korollar B zu Satz 10 in Kapitel 5 der Vorlesung existiert ein eindeutiger Lift $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \to E$ von h mit $\tilde{h}(0, 0) = q$. Dann gilt:

$$\varphi \circ \tilde{h}(0, t) = h(0, t) = \alpha(t)$$
$$\varphi \circ \tilde{h}(1, t) = h(1, t) = \beta(t)$$

Somit ist $\tilde{\alpha}(t) := \tilde{h}(0, t)$ ein Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{h}(0, 0) = q$. Genauso ist $\tilde{\beta}(t) := \tilde{h}(1, t)$ ein Lift von β mit $\tilde{\alpha}(0) = q$.

Weiter definiert $\tilde{h}(s,1)$ für $s \in [0,1]$ einen Weg in $\varphi^{-1}(p)$ von $\tilde{h}(0,1) = \tilde{\alpha}(1)$ nach $\tilde{h}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$. Da φ eine Überlagerung ist, ist $\varphi^{-1}(p)$ diskret. Somit ist der Weg $\tilde{h}(s,1)$ konstant und es gilt $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Damit hängt der Ausdruck $q^{[\alpha]}$ nicht von dem gewählten Repräsentanten α ab.
Da $\tilde{\alpha}_q$ ein Lift von α ist, gilt $\varphi(\tilde{\alpha}_q(1)) = \alpha(1) = p$, d.h. $\tilde{\alpha}_q(1) \in \varphi^{-1}(p)$. Insgesamt ist $q^{[\alpha]}$ daher wohldefiniert.
Nun zeigen wir, dass dies eine Rechtswirkung von $\pi_1(X,p)$ auf $\varphi^{-1}(q)$ definiert. Sei $q \in \varphi^{-1}(p)$ beliebig. Es gilt $1_{\pi_1(X,p)} = [\varepsilon_p]$, wobei $\varepsilon_p : [0,1] \to X, t \mapsto p$ der konstante Weg in p ist. Offenbar ist der konstante Weg ε_q ein Lift von ε_p mit $\varepsilon_q(0) = q$. Nach Definition gilt damit:

$$q^{[\varepsilon_p]} = \varepsilon_q(1) = q$$

Seien nun $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,p)$ beliebig. Zu zeigen: $(q^{[\alpha]})^{[\beta]} = q^{[\alpha][\beta]}$
Es gilt $q^{[\alpha]} = \tilde{\alpha}_q(1)$, wobei $\tilde{\alpha}_q$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_q(0) = q$ ist. Dann ist $(q^{[\alpha]})^{[\beta]} = \tilde{\alpha}_q(1)^{[\beta]} = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}(1)$, wobei $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}$ der eindeutige Lift von β mit $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}(0) = \tilde{\alpha}_q(1)$ ist.
Wegen $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}(0) = \tilde{\alpha}_q(1)$ können wir den Weg $\tilde{\alpha}_q * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}$ betrachten. Da $\tilde{\alpha}_q$ ein Lift von α und $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}$ ein Lift von β ist, ist $\tilde{\alpha}_q * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}$ ein Lift von $\alpha * \beta$. Weiter gilt $(\tilde{\alpha}_q * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)})(0) = \tilde{\alpha}_q(0) = q$. Somit erhalten wir nach Definition:

$$q^{[\alpha][\beta]} = q^{[\alpha * \beta]} = (\tilde{\alpha}_q * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)})(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_q(1)}(1) = (q^{[\alpha]})^{[\beta]}$$

Es bleibt noch zu zeigen: Die Wirkung von $\pi_1(X,p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ ist transitiv.
Seien $q_1, q_2 \in \varphi^{-1}(p)$ beliebig. Da E wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\tilde{\alpha} : [0,1] \to E$ von q_1 nach q_2. Sei $\alpha := \varphi \circ \tilde{\alpha}$.
Dann gilt $\alpha(0) = \varphi(\tilde{\alpha}(0)) = \varphi(q_1) = p$ und $\alpha(1) = \varphi(\tilde{\alpha}(1)) = \varphi(q_2) = p$, d.h. $\alpha : [0,1] \to X$ ist ein Weg von p nach p und damit $[\alpha]$ ein wohldefiniertes Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,p)$.
Nach Konstruktion ist $\tilde{\alpha}$ ein Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = q_1$. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts folgt

$$q_1^{[\alpha]} = \tilde{\alpha}(1) = q_2$$

und da $q_1, q_2 \in \varphi^{-1}(p)$ beliebig waren, ist die Wirkung damit transitiv.

Aufgabe 9.4
Sei G eine abzählbare Gruppe. Zeige: Es gibt eine divisible Gruppe G^*, welche G als Untergruppe enthält.

Lösung: Setze $G' := G \oplus \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann ist G' eine abzählbare Gruppe, die G als Untergruppe enthält und in welcher es Elemente jeder Ordnung gibt. Nach Aufgabe 8.4 existiert eine Gruppe G^*, welche G' (und damit auch G) als Untergruppe enthält und in welcher alle Elemente gleicher Ordnung konjugiert zueinander sind.
Behauptung: G^* ist divisibel.
Beweis: Seien $g \in G^*$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ beliebig. Zu zeigen: Es gibt $h \in G$ mit $h^n = g$. Dafür machen wir eine Fallunterscheidung nach der Ordnung von g.
1. Fall: $\mathrm{ord}(g) = \infty$

Hat g unendliche Ordnung, so hat auch g^n unendliche Ordnung. Nach Konstruktion von G^* sind g und g^n zueinander konjugiert. Es gibt somit $k \in G^*$ mit $g = kg^nk^{-1}$. Setze $h := kgk^{-1}$. Dann gilt:

$$h^n = (kgk^{-1})^n = kg^nk^{-1} = g$$

2. Fall: $\mathrm{ord}(g) = m < \infty$
Da $G' \leq G^*$ eine Untergruppe ist, enthält G^* Elemente jeder Ordnung. Sei $z \in G^*$ mit $\mathrm{ord}(z) = nm$. Dann hat das Element z^n Ordnung $m = \mathrm{ord}(g)$ und ist damit konjugiert zu g. Sei $k \in G^*$ mit $g = kz^nk^{-1}$. Setze $h := kzk^{-1}$.
Wir erhalten:

$$h^n = (kzk^{-1})^n = kz^nk^{-1} = g$$

In beiden Fällen existiert ein $h \in G^*$ mit $h^n = g$. G^* ist somit divisibel.

***-Aufgabe**
Seien E, X, φ und $p \in X$ wie in Aufgabe 9.3. Zeige:

a) Die in 9.3 definierte Wirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ ist genau dann frei, wenn E einfach-zusammenhängend ist.

b) Sei $\psi : E \to E$ eine Decktransformation für die Überlagerung $\varphi : E \to X$ (d.h. $\varphi \circ \psi = \varphi$) und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$. Dann gilt $\psi(q^{[\alpha]}) = \psi(q)^{[\alpha]}$ für alle $q \in \varphi^{-1}(p)$.
Die in Aufgabe 9.3 konstruierte Rechtswirkung von $\pi_1(X, p)$ kommutiert also mit der Linkswirkung durch Decktransformationen.

Lösung:

a) „$\Rightarrow$“ Sei die Wirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ frei. Sei $q \in \varphi^{-1}(p)$ beliebig.
Zu zeigen: Es gilt $\pi_1(E, q) = \{[\varepsilon_q]\}$.
Sei $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(E, q)$ beliebig. Betrachte $\alpha := \varphi \circ \tilde{\alpha}$.
Dann ist $[\alpha] = \varphi_\#[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(X, p)$. Da $\tilde{\alpha}$ nach Konstruktion ein Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = q$ ist, gilt $q^{[\alpha]} = \tilde{\alpha}(1) = q$. Weil die Wirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(\alpha)$ frei ist, folgt $[\alpha] = [\varepsilon_p]$. Also gilt $\varphi_\#[\tilde{\alpha}] = [\alpha] = [\varepsilon_p]$. Da φ eine Überlagerung ist, ist der induzierte Homomorphismus $\varphi_\#$ nach Korollar C zu Satz 10 in Kapitel 5 der Vorlesung injektiv. Somit gilt $[\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_q]$. Da $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(E, q)$ beliebig war, erhalten wir $\pi_1(E, q) = \{[\varepsilon_q]\}$ und E ist einfach-zusammenhängend.
„$\Leftarrow$“ Sei E einfach zusammenhängend. Seien weiter $q \in \varphi^{-1}(p)$ und $[\alpha] \in \pi_1(X, p)$ mit $q^{[\alpha]} = q$. Zu zeigen: $[\alpha] = 1_{\pi_1(X,p)} = [\varepsilon_p]$
Wegen $q^{[\alpha]} = q$ gilt $\tilde{\alpha}_q(1) = q$ für den eindeutigen Lift $\tilde{\alpha}_q$ von α mit $\tilde{\alpha}_q(0) = q$. Somit ist $[\tilde{\alpha}_q]$ ein wohldefiniertes Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(E, q)$. Da E einfach-zusammenhängend ist, folgt $[\tilde{\alpha}_q] = [\varepsilon_q]$. Da $\tilde{\alpha}_q$ ein Lift von α ist, gilt $\varphi \circ \tilde{\alpha}_q = \alpha$, d.h. $[\alpha] = \varphi_\#[\tilde{\alpha}_q] = \varphi_\#[\varepsilon_q] = [\varepsilon_p]$. Somit ist $[\alpha]$ trivial und die Wirkung von $\pi_1(X, p)$ auf $\varphi^{-1}(p)$ ist frei.

b) Es gilt einerseits $\psi(q^{[\alpha]}) = \psi(\tilde{\alpha}_q(1))$, wobei $\tilde{\alpha}_q$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_q(0) = q$ ist. Andererseits gilt $\psi(q)^{[\alpha]} = \tilde{\alpha}_{\psi(q)}(1)$, wobei $\tilde{\alpha}_{\psi(q)}$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}_{\psi(q)}(0) = \psi(q)$ ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\psi \circ \tilde{\alpha}_q = \tilde{\alpha}_{\psi(q)}$ gilt. Aus $\varphi \circ \psi = \varphi$ erhalten wir:

$$\varphi \circ (\psi \circ \tilde{\alpha}_q) = (\varphi \circ \psi) \circ \tilde{\alpha}_q = \varphi \circ \tilde{\alpha}_q = \alpha$$

Somit ist $\psi \circ \tilde{\alpha}_q$ ein Lift von α mit $\psi \circ \tilde{\alpha}_q(0) = \psi(\tilde{\alpha}_q(0)) = \psi(q)$.
$\tilde{\alpha}_{\psi(q)}$ ist aber der eindeutige Lift mit dieser Eigenschaft. Dies impliziert $\psi \circ \tilde{\alpha}_q = \tilde{\alpha}_{\psi(q)}$. Insgesamt gilt daher:

$$\psi(q^{[\alpha]}) = \psi(\tilde{\alpha}_q(1)) = \tilde{\alpha}_{\psi(q)}(1) = \psi(q)^{[\alpha]}$$