7. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 7.1
Schreibe die folgenden Gruppen als amalgamierte Produkte:

a) $G = \langle x, y \mid x^3y^{-3}, y^6 \rangle$

b) $H = \langle x, y \mid x^{30}, y^{70}, x^3y^{-5} \rangle$

Aufgabe 7.2
Zeige: Es gibt überabzählbar viele Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden und nicht endlich präsentiert sind.

Aufgabe 7.3
Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \leq G$. Sei $C = A \cap B$.
Zeige: Es gilt $G \cong A *_C B$ genau dann, wenn sich jedes Element $g \in G \setminus C$ als Produkt $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ mit $g_i \in G_i \setminus C$ für $G_i \in \{A, B\}$ mit $G_i \neq G_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ schreiben lässt und kein solches Produkt gleich 1 ist.

Aufgabe 7.4
Seien G, H Gruppen, $\alpha : G \to H$ ein Epimorphismus und $H = H_1 *_{H_3} H_2$.
Beweise: Für $G_i := \alpha^{-1}(H_i), i = 1, 2, 3$ gilt $G \cong G_1 *_{G_3} G_2$.
Hinweis: Verwende das Kriterium aus Aufgabe 7.3.

Bitte wenden.

Nikolausaufgabe
Der Nikolaus hat Jimmy zwei Geschenke mitgebracht und zwar ein rotes Auto a und einen gelben Ball b. Jimmy möchte aber unbedingt noch ein drittes Geschenk, nämlich eine Clownsnase c bekommen.
Normalerweise bleibt der Nikolaus in solchen Fällen streng (oder ruft sogar Knecht Ruprecht mit der Rute herbei!). Aber da Jimmy in diesem Jahr besonders artig war, gibt ihm der Nikolaus eine Chance, sich das ersehnte dritte Geschenk zu erspielen.
Dazu soll ihm Jimmy sagen, wieviele (paarweise nicht zueinander isomorphe) Gruppen entstehen können, wenn man die Gruppe G mit Erzeugern a, b und einer Relation r bildet, wobei die Relation r aus 4 Buchstaben besteht, die Jimmy nacheinander zufällig aus seinen beiden Geschenken zieht. (Es wird natürlich mit Zurücklegen gezogen.)
Könnt ihr Jimmy helfen?

Abgabe bis: Donnerstag, den 10.12.2015, 8 Uhr