7. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“
Musterlösung

WiSe 2015/16 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 7.1
Schreibe die folgenden Gruppen als amalgamierte Produkte:

a) $G = \langle x, y \mid x^3y^{-3}, y^6 \rangle$

b) $H = \langle x, y \mid x^{30}, y^{70}, x^3y^{-5} \rangle$

Lösung:

a) Behauptung: $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
Wir zeigen zunächst, dass x^6 trivial in G ist.
Nach Definition gilt $G = F(x, y)/N$, wobei $N = \langle\langle x^3y^{-3}, y^6 \rangle\rangle$ der von den Elementen x^3y^{-3} und y^6 erzeugte Normalteiler in der freien Gruppe $F(x, y)$ ist. Wir müssen also zeigen: $x^6 \in N$
Da N ein Normalteiler ist, folgt aus $x^3y^{-3} \in N$, dass auch $y^3(x^3y^{-3})y^{-3}$ in N liegt. Daher gilt:

$$y^3x^3 = y^3(x^3y^{-3})y^{-3} \cdot y^6 \in N$$

Es folgt $x^6 = x^3y^{-3} \cdot y^3x^3 \in N$ und wir erhalten

$$G = \langle x, y \mid x^3y^{-3}, y^6 \rangle = \langle x, y \mid x^3y^{-3}, y^6, x^6 \rangle.$$

Nun genügt es zu zeigen, dass das amalgamierte Produkt $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ebenfalls diese Präsentierung besitzt.
Im Beweis von Aufgabe 5.2 b) haben wir gesehen, dass $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^k \rangle$ gilt. Fixiere die Präsentierungen $\langle x \mid x^6 \rangle$ und $\langle y \mid y^6 \rangle$ von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
Nach Aufgabe 4.4 a) gilt dann für das freie Produkt

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid x^6, y^6 \rangle.$$

Schreibe weiter $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle t \mid t^2 \rangle$. Nun ist die Inklusion von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gegeben durch $\iota_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, t \mapsto x^3$ bzw. $\iota_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, t \mapsto y^3$.
Nach der Definition des amalgamierten Produkts gilt daher:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &= (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/\langle\langle \iota_1(u)\iota_2(u^{-1}), u \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle\rangle \\
&\cong \langle x, y \mid x^6, y^6 \rangle / \langle\langle \iota_1(t)\iota_2(t^{-1}) \rangle\rangle \\
&= \langle x, y \mid x^6, y^6 \rangle / \langle\langle x^3y^{-3} \rangle\rangle \\
&= \langle x, y \mid x^6, y^6, x^3y^{-3} \rangle = G
\end{aligned}$$

b) Behauptung: $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$
Wie in a) sieht man, dass $H' := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ die Präsentierung

$$H' = \langle a, b \mid a^6, b^{10}, a^3b^{-5} \rangle$$

besitzt. Es genügt also einen Isomorphismus $\varphi : H \to H'$ zu konstruieren. Die Abbildung $x \mapsto a, y \mapsto b$ induziert nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe $F(x, y)$ einen Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F(x, y) \to H'$.
Wir beobachten:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x^{30}) &= \tilde{\varphi}(x)^{30} = a^{30} = (a^6)^5 = 1^5 = 1 \\ \tilde{\varphi}(y^{70}) &= \tilde{\varphi}(y)^{70} = b^{70} = (b^{10})^7 = 1^7 = 1 \\ \tilde{\varphi}(x^3y^{-5}) &= \tilde{\varphi}(x)^3\tilde{\varphi}(y)^{-5} = a^3b^{-5} = 1 \end{aligned}$$

Da alle Relationen von H unter $\tilde{\varphi}$ auf 1 abgebildet werden, existiert nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $H = \langle x, y \mid x^{30}, y^{70}, x^3y^{-5} \rangle$ ein Homomorphismus $\varphi : H \to H'$ mit $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$, wobei $\pi : F(x, y) \to H$ die kanonische Projektion ist.
Um zu zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist, konstruieren wir einen Homomorphismus $\psi : H' \to H$, der invers zu φ ist.
Diesen erhalten wir ganz analog wie oben φ durch die Zurordnung $a \mapsto x$, $b \mapsto y$. Damit dies aber einen wohldefinierten Homomorphismus $\psi : H' \to H$ liefert, müssen die Relationen in H' auf das triviale Element abgebildet werden, d.h. in H muss $x^6 = 1$ und $y^{10} = 1$ gelten.
Aus der Relation $x^3y^{-5} = 1$ lesen wir ab, dass in H $x^3 = y^5$ gilt und somit auch $y^{50} = x^{30} = 1$. Wir erhalten:

$$y^{10} = y^{-200}y^{210} = (y^{50})^{-4}(y^{70})^3 = 1^{-4}1^3 = 1$$

Dies ergibt für x:

$$x^6 = (x^3)^2 = (y^5)^2 = y^{10} = 1$$

Folglich ist ψ ein wohldefinierter Homomorphismus. Aus der „Wirkung“ von φ bzw. ψ auf den Erzeugern x, y von H bzw. a, b von H' ist direkt ersichtlich, dass φ und ψ zueinander invers sind.
Damit ist φ ein Isomorphismus und es gilt $H \cong H' = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Aufgabe 7.2
Zeige: Es gibt überabzählbar viele Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden und nicht endlich präsentiert sind.

Lösung: Per Widerspruch: Angenommen, es gäbe nur abzählbar viele Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden und nicht endlich präsentiert sind.
Wir zeigen zunächst, dass die Menge X der endlich präsentierten Gruppen mit zwei Erzeugern abzählbar ist.
Sei G eine Gruppe mit zwei Erzeugern a und b. Für $k \in \mathbb{N}$ hat die Menge der (nicht notwendig reduzierten) Wörter w über $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ mit Länge $l(w) = k$ genau $4^k < \infty$ Elemente. Somit ist auch die Menge der Wörter über $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ mit Länge $\leq k$ endlich.
Für l Relationen der Länge $\leq k$ gibt es demnach nur endlich viele Möglichkeiten. Es gibt also nur endlich viele Gruppen der Form $G = \langle a, b \mid R \rangle$, wobei $\#R \leq l$ und $\max\{l(r) \mid r \in R\} \leq k$ gilt. Sei für $l, k \in \mathbb{N}$ die Menge $X_{l,k}$ gegeben durch

$$X_{l,k} := \{\langle a, b \mid R \rangle \mid R \subseteq F(a, b),\ \#R \leq l,\ \max\{l(r) \mid r \in R\} \leq k\}.$$

Dann gilt: $X = \bigcup\limits_{l,k \in \mathbb{N}} X_{l,k}$
X ist also als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar.

Mit der Annahme, dass es nur abzählbar viele Gruppen gibt, die von zwei Elementen erzeugt werden und nicht endlich präsentiert sind, folgt, dass es insgesamt nur abzählbar viele Gruppen mit zwei Erzeugern gibt. Dies steht im Widerspruch zu Theorem 9 aus Kapitel 4 in der Vorlesung. $\lightning$
Die Annahme war also falsch und es gibt überabzählbar viele nicht endlich präsentierte Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden.

Aufgabe 7.3
Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $A, B \leq G$. Sei $C = A \cap B$.
Zeige: Es gilt $G \cong A *_C B$ genau dann, wenn sich jedes Element $g \in G \setminus C$ als Produkt $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ mit $g_i \in G_i \setminus C$ für $G_i \in \{A, B\}$ mit $G_i \neq G_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ schreiben lässt und kein solches Produkt gleich 1 ist.

Lösung:„$\Rightarrow$" Sei $G \cong A *_C B$ und $g \in G \setminus C$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass g eine eindeutige Normalform besitzt, d.h. es gibt $g_1, \ldots, g_n$ mit $g_i \in G_i \setminus C$ für $G_i \in \{A, B\}$ mit $G_i \neq G_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $c \in C$ mit $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \cdot c$. ($g_i \notin C$ können wir voraussetzen, da wir die $g_i \neq 1$ in den fixierten Transversalen für C in A bzw. C in B wählen dürfen.)
Ersetzen wir g_n durch $g_n \cdot c \in G_n \setminus C$ erhalten wir die gewünschte Darstellung von g.
Da die Normalform eindeutig ist, ist kein solches Produkt trivial.
„$\Leftarrow$" Die Inklusionen von A und B in G induzieren eine kanonische Abbildung $\tilde{\varphi} : A * B \to G$. Für die Inklusionen $\iota_1 : C \to A$ und $\iota_2 : C \to B$ gilt

$$\tilde{\varphi}(\iota_1(c) \cdot \iota_2(c^{-1})) = \tilde{\varphi}(\iota_1(c)) \cdot \tilde{\varphi}(\iota_2(c^{-1})) = cc^{-1} = 1$$

für alle $c \in C$. Damit induziert $\tilde{\varphi}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\varphi : A *_C B \to G$ mit $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$, wobei $\pi : A * B \to A *_C B$ die kanonische Projektion ist.
Um zu zeigen, dass φ surjektiv ist, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ surjektiv ist.
Da $\tilde{\varphi}$ von den Inklusionen induziert wird, sind A und B, damit auch insbesondere C, im Bild von $\tilde{\varphi}$ enthalten. Für $g \in G \setminus C$ gibt es nach Voraussetzung $g_1, \ldots, g_n$ mit $g_i \in G_i \setminus C$ für $G_i \in \{A, B\}$ mit $G_i \neq G_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ so, dass $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ gilt.
Fassen wir $g_1 \ldots g_n$ als Element in $A * B$ auf, so gilt $g = \tilde{\varphi}(g_1 \ldots g_n)$ nach Konstruktion von $\tilde{\varphi}$. Somit ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv.
Es bleibt zu zeigen, dass φ injektiv ist. Dafür beweisen wir $\ker(\varphi) = \{1\}$. Sei $x \in A *_C B, x \neq 1$. Dann können wir $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot c$ in Normalform schreiben. Dann ist aber $\varphi(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot (x_n \cdot c) \in G$ nach Voraussetzung ungleich 1, also $x \notin \ker(\varphi)$. Damit folgt $\ker(\varphi) = \{1\}$ und φ ist injektiv.
Insgesamt ist φ ein Isomorphismus und es gilt $G \cong A *_C B$.

Aufgabe 7.4
Seien G, H Gruppen, $\alpha : G \to H$ ein Epimorphismus und $H = H_1 *_{H_3} H_2$.
Beweise: Für $G_i := \alpha^{-1}(H_i), i = 1, 2, 3$ gilt $G \cong G_1 *_{G_3} G_2$.

Lösung: Wir zeigen $G \cong G_1 *_{G_3} G_2$, indem wir das Kriterium aus Aufgabe 7.3 nachprüfen.
Sei also $g \in G \setminus G_3$ beliebig. Dann gilt $\alpha(g) \in H \setminus H_3$. Wegen $H = H_1 *_{H_3} H_2$ existieren nach Aufgabe 7.3 Elemente $h_1, \ldots, h_n$ mit $h_i \in H(i) \setminus H_3$ für $H(i) \in \{H_1, H_2\}$ mit $H(i) \neq H(i+1)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ so, dass $\alpha(g) = h_1 \cdot \ldots h_n$ gilt.

Da α surjektiv ist, gibt es zu jedem h_i ein $g_i \in G$ mit $\alpha(g_i) = h_i$. Ist $h_i \in H_j$ für $j \in \{1, 2\}$ gilt nach Definition $g_i \in \alpha^{-1}(H_j) = G_j$. Wegen $h_i \notin H_3$ gilt $g_i \notin G_3$. Setzen wir $G(i) := G_j$ mit $H(i) = H_j$, so haben wir Elemente $g_1, \dots, g_n$ mit $g_i \in G(i) \setminus G_3$ für $G(i) \in \{G_1, G_2\}$ mit $G(i) \neq G(i+1)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ so, dass

$$\alpha(g) = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n = \alpha(g_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(g_n) = \alpha(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)$$

gilt. Es folgt $(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)^{-1} g \in \ker \alpha = \alpha^{-1}(1) \subseteq \alpha^{-1}(H_3) = G_3$.
Sei $(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)^{-1} g = g' \in G_3$, also $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \cdot g'$. Ersetzen wir g_n durch $g_n \cdot g' \in G(n) \setminus G_3$, so erhalten wir $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$.
Daher erfüllt G die erste Bedingung aus Aufgabe 7.3.
Seien nun $g_1, \dots, g_n \in G$ mit $g_i \in G(i) \setminus G_3$ für $G(i) \in \{G_1, G_2\}$ mit $G(i) \neq G(i+1)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Zu zeigen: $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \neq 1$
Setze $h_i := \alpha(g_i)$ und $H(i) = H_j$ mit $G(i) = G_j$. Dann gilt wegen $g_i \in G(i) \setminus G_3 = \alpha^{-1}(H(i) \setminus H_3)$ schon $h_i \in H(i) \setminus H_3$. Nach Aufgabe 7.3 ist das Produkt $h_1 \cdot \ldots \cdot h_n$ in $H = H_1 *_{H_3} H_2$ nicht trivial. Aus

$$\alpha(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = \alpha(g_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(g_n) = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n \neq 1$$

folgt daher $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n \neq 1$.
Schließlich erfüllt G die beiden Bedingungen des Kriteriums aus Aufgabe 7.3 und es gilt somit $G \cong G_1 *_{G_3} G_2$.

Nikolausaufgabe
Der Nikolaus hat Jimmy zwei Geschenke mitgebracht und zwar ein rotes Auto a und einen gelben Ball b. Jimmy möchte aber unbedingt noch ein drittes Geschenk, nämlich eine Clownsnase c bekommen.
Normalerweise bleibt der Nikolaus in solchen Fällen streng (oder ruft sogar Knecht Ruprecht mit der Rute herbei!). Aber da Jimmy in diesem Jahr besonders artig war, gibt ihm der Nikolaus eine Chance, sich das ersehnte dritte Geschenk zu erspielen.
Dazu soll ihm Jimmy sagen, wieviele (paarweise nicht zueinander isomorphe) Gruppen entstehen können, wenn man die Gruppe G mit Erzeugern a, b und einer Relation r bildet, wobei die Relation r aus 4 Buchstaben besteht, die Jimmy nacheinander zufällig aus seinen beiden Geschenken zieht. (Es wird natürlich mit Zurücklegen gezogen.)
Könnt ihr Jimmy helfen?

Lösung: Um Jimmy zur gewünschten Clownsnase zu verhelfen, müssen wir ihm die Antwort „4“ empfehlen.
Wir zeigen also, dass es bis auf Isomorphie genau vier Gruppen der Form $G = \langle a, b \mid r \rangle$ gibt, wobei r ein Wort der Länge 4 über $\{a, b\}$ ist.
Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der Erzeuger a in der Relation r mindestens so häufig wie b (also mindestens zweimal) auftritt. (Ansonsten vertausche die Bezeichnungen a und b in der Präsentierung von G.)
Somit ist die Menge R der möglichen Relationen r gegeben durch:

$$R = \{a^4, ba^3, aba^2, a^2ba, a^3b, abab, baba, b^2a^2, ab^2a, a^2b^2, ba^2b\}$$

Wir setzen $R_1 = \{a^4\}$, $R_2 = \{ba^3, aba^2, a^2ba, a^3b\}$, $R_3 = \{abab, baba\}$ und $R_4 = \{b^2a^2, ab^2a, a^2b^2, ba^2b\}$. Es gilt dann $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$.

Behauptung: Für $r \in R_1$ gilt $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
Beweis: Sei $r \in R_1$, also $r = a^4$. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^4 \rangle$ und $\mathbb{Z} \cong \langle b \mid \emptyset \rangle$ gilt. Mit Aufgabe 4.4 a) folgt:

$$G = \langle a, b \mid a^4 \rangle \cong \langle a \mid a^4 \rangle * \langle b \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Behauptung: Für $r \in R_2$ gilt $G \cong \mathbb{Z}$.
Beweis: Wir beobachten zuerst, dass alle Elemente in R_2 konjugiert zu ba^3 sind. Es gilt nämlich:

$$aba^2 = a(ba^3)a^{-1},\ a^2ba = a^2(ba^3)a^{-2},\ a^3b = a^3(ba^3)a^{-3}$$

Da alle Elemente $r \in R_2$ konjugiert zu ba^3 sind, erzeugen sie den gleichen Normalteiler $\langle\langle r \rangle\rangle$ in der freien Gruppe $F(a, b)$. Nach der Definition einer Präsentierung erhalten wir daher

$$G = \langle a, b \mid r \rangle = F(a, b)/\langle\langle r \rangle\rangle = F(a, b)/\langle\langle ba^3 \rangle = \langle a, b \mid ba^3 \rangle$$

für alle $r \in R_2$. Dass die Gruppe $\langle a, b \mid ba^3 \rangle$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, beweist man vollkommen analog zu Aufgabe 5.2 a).
Behauptung: Für $r \in R_3$ gilt $G \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Beweis: Da $baba = b(abab)b^{-1}$ konjugiert zu $abab$ ist, gilt $\langle a, b \mid baba \rangle = \langle a, b \mid abab \rangle$. Es genügt daher zu zeigen, dass $G = \langle a, b \mid abab \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt.
Wähle die Präsentierungen $\mathbb{Z} \cong \langle c \mid \emptyset \rangle$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle d \mid d^2 \rangle$.
Nach Aufgabe 4.4 a) gilt dann:

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle c, d \mid d^2 \rangle$$

Wir konstruieren nun einen Isomorphismus $\varphi : G = \langle a, b \mid abab \rangle \to G' := \langle c, d \mid d^2 \rangle$. Betrachte die Zuordnung $\alpha : a \mapsto c, b \mapsto c^{-1}d$. Für den durch die universelle Eigenschaft induzierten Homomorphismus $F(\alpha) : F(a, b) \to G'$ gilt dann:

$$F(\alpha)(abab) = F(\alpha)(a) \cdot F(\alpha)(b) \cdot F(\alpha)(a) \cdot F(\alpha)(b) = c(c^{-1}d)c(c^{-1}d) = d^2 = 1$$

Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $G = \langle a, b \mid abab \rangle$ existiert ein Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = c^{-1}d$. (Beachte, dass a und b jetzt als Elemente in G aufgefasst werden. Genauer handelt es sich um die Klassen von a bzw. b im Quotienten $F(a, b)/\langle\langle abab \rangle\rangle$.)
Umgekehrt können wir die Zuordnung $\beta : c \mapsto a, d \mapsto ab$ betrachten. Für den induzierten Homomorphismus $F(\beta) : F(c, d) \to G$ gilt dann:

$$F(\beta)(d^2) = F(\beta)(d)^2 = (ab)^2 = 1$$

Nach der universellen Eigenschaft der Gruppe $G' = \langle c, d \mid d^2 \rangle$ existiert ein Homomorphismus $\psi : G' \to G$ mit $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = ab$.
Wir zeigen nun, dass φ und ψ zueinander inverse Abbildungen sind, φ also ein Isomorphismus ist. Es ist ausreichend, dies auf den Erzeugern a, b von G bzw. c, d von G' nachzurechnen:

$$\begin{aligned} &\psi(\varphi(a)) = \psi(c) = a, \quad \psi(\varphi(b)) = \psi(c^{-1}d) = \psi(c)^{-1}\psi(d) = a^{-1}(ab) = b \\ &\varphi(\psi(c)) = \varphi(a) = c, \quad \varphi(\psi(d)) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = c(c^{-1}d) = d \end{aligned}$$

Folglich sind φ und ψ zueinander invers und es gilt $G \cong G' \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Behauptung: Für $r \in R_4$ gilt $G \cong \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, wobei das amalgamierte Produkt bzgl. der Inklusionen $\varepsilon_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto 2z$ und $\varepsilon_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto -2z$ gebildet wird.
Beweis: Wiederum zeigen wir zunächst, dass alle Elemente $r \in R_4$ konjugiert zu a^2b^2 sind. Es gilt nämlich:

$$b^2a^2 = a^{-2}(a^2b^2)a^2,\ ab^2a = a^{-1}(a^2b^2)a,\ ba^2b = b(a^2b^2)b^{-1}$$

Es gilt also $G = \langle a, b \mid r \rangle = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$ für alle $r \in R_4$.
Desweiteren gilt:

$$\langle a, b \mid \emptyset \rangle = F(a, b) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Nach Konstruktion ist $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ bzgl. der Abbildungen ε_1 und ε_2 gegeben durch

$$\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/\langle\langle \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(-z), z \in \mathbb{Z} \rangle\rangle.$$

Da $\mathbb{Z}$ von 1 erzeugt wird, gilt schon $\langle\langle \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(-z), z \in \mathbb{Z} \rangle\rangle = \langle\langle \varepsilon_1(1)\varepsilon_2(-1) \rangle\rangle$. Unter der obigen Identifikation $\langle a, b \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ gilt $\varepsilon_1(1) = a^2$ und $\varepsilon_2(1) = b^{-2}$. Wir erhalten damit:

$$\varepsilon_1(1) \cdot \varepsilon_2(-1) = a^2(b^{-2})^{-1} = a^2b^2$$

Insgesamt folgt:

$$\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/\langle\langle \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(-z), z \in \mathbb{Z} \rangle\rangle \cong F(a, b)/\langle\langle a^2b^2 \rangle\rangle = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle = G$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ (bzgl. den Abbildungen $\varepsilon_i, i = 1, 2$ wie oben) paarweise nicht isomorph zueinander sind.
Zunächst stellen wir fest, dass $\mathbb{Z}$ torsionsfrei ist. Nach Korollar zu Satz 5 aus Kapitel 4 der Vorlesung ist $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ ebenfalls torsionsfrei. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besitzen hingegen nicht-triviale endliche Untergruppen. Damit sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ jeweils nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Desweiteren kann man einen Epimorphismus $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ konstruieren. (Beachte, dass nach Aufgabe 4.4 b)

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

gilt.) Da das Bild einer zyklischen Gruppe unter einem Homomorphismus wieder zyklisch ist, schließen wir daraus, dass $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ nicht zyklisch, also nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.
Wir müssen noch nachprüfen, dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht isomorph zueinander sind.
Das freie Produkt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ enthält $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ als Untergruppe, also Elemente der Ordnung 4. Nach Satz 5 (*iii*) aus Kapitel 4 der Vorlesung ist jedes Torsionselement in $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ konjugiert zu einem Element in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da in diesen Gruppen kein Element der Ordnung 4 existiert, enthält $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein Element der Ordnung 4. Folglich sind $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht zueinander isomorph.
Insgesamt haben wir gezeigt, dass es bis auf Isomorphie genau vier Gruppen der Form $G = \langle a, b \mid r \rangle$ gibt, wobei r ein Wort über $\{a, b\}$ der Länge 4 ist.