6. Übungszettel zur Vorlesung „Geometrische Gruppentheorie“

WiSe 2015/16 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 6.1
Sei F_2 die freie Gruppe von Rang 2 mit Basis $\{x, y\}$.

a) Beweise: Die Menge $\{xyx^{-1}, xy\}$ ist eine Basis von F_2.

b) Bestimme ein Element $w \in F_2, w \neq e$, sodass es keine Basis von F_2 gibt, welche w enthält.

Aufgabe 6.2
Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G. Zeige:

a) Sind N und G/N endlich erzeugt, so ist G endlich erzeugt.

b) Schreibe Themen auf, welche du in der Vorlesung nicht gut verstanden hast und in der Übung genauer besprechen möchtest.
Hinweis: Hilfreich sind möglichst konkrete Fragen, z.B. „Warum gilt in der Vorlesung in Beweis von Satz abc die Folgerung xyz?“.

Aufgabe 6.3
Zeige, dass die Gruppe G mit der Präsentierung

$$G = \langle x_n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid x_{n-1}^{-1} x_n^n \ \forall n > 1 \rangle$$

isomorph zu der additiven Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist.
Hinweis: Betrachte Brüche von der Form $\frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 6.4
Beweise folgende Isomorphien:

a)
$$\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \{1\},$$
wobei der Kolimes bzgl. der kanonischen Projektionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gebildet werde.

b)
$$\varinjlim(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$
wobei der Kolimes bzgl. der Abbildungen $\varepsilon_1 : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
$a + 4\mathbb{Z} \mapsto a + 2\mathbb{Z}$ und $\varepsilon_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ gebildet werde.

***-Aufgabe**
Seien X, Y endliche Mengen und $R \subseteq F(X), S \subseteq F(Y)$ endliche Teilmengen. Sei weiter G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige:
Sind $N = \langle X \mid R \rangle$ und $G/N = \langle Y \mid S \rangle$ endlich präsentiert, so ist auch G endlich präsentiert.
Hinweis: Wähle für jedes $y \in Y$ ein Urbild $\tilde{y} \in G$ bzgl. der kanonischen Projektion $G \to G/N$. Dann können wir jedes Wort $w \in F(Y)$ durch Einsetzen von $\tilde{y}$ für das entsprechende Element y als ein Element $\tilde{w}$ in G auffassen. Nun suche Relationen, welche beschreiben, dass N normal in G ist und die Elemente $\tilde{s}$ für $s \in S$ modulo N trivial sind.

Abgabe bis: Donnerstag, den 3.12.2015, 8 Uhr